CIENCIA BÁSICA Y CULTURA

Boletín de Ciencias Básicas

Año 2025 Número 21 30 de junio

Las matemáticas en la **ingeniería,** la **naturaleza** y la **vida cotidiana.**

Casiano Aguilar Morales
Coordinación de Matemáticas de la DCB
Revisor: Fernando Sánchez Rodríguez
Coordinación de Ciencias Aplicadas de la DCB

El presente trabajo es el primero de una serie de artículos en los cuales se mostrará la relación que tiene las matemáticas en la Ingeniería, la naturaleza y la vida cotidiana.

"La catenaria: la elegancia de una curva natural"

El término **catenaria** se emplea la mayoría de las veces para referirse a la curva que describen los cables en un tendido eléctrico. De igual forma en las matemáticas como en la ingeniería se emplea la palabra **catenaria** para designar curva cuyo trazo sigue la forma que adquiere una cadena o cable de densidad uniforme y flexible sujeta a dos extremos y que está sometida únicamente a las fuerzas de gravedad. (como se muestra en la imagen de esta página)

Historia de la catenaria

En sus cuadernos de notas, Leonardo había esbozado algunas cadenas como la descrita. Está curva también fue presentada a Descartes por su amigo Isaac Beeckman, pero no hay constancia de que Descartes intentase nunca resolverlo. Históricamente, el problema acabó adoptando la denominación de *problema de la catenaria* (de la palabra latina catena, cadena). Galileo creyó que la forma debía de ser una parábola, pero el jesuita francés Ignatius Pardies (1636-1673) demostró que se equivocaba. Sin embargo, Pardies no fue capaz de resolver matemáticamente cuál era la forma correcta.

Sólo un año después de que Jakob Bernoulli plantease el problema, su hermano Johann lo resolvió (mediante una **ecuación diferencial**). Leibniz y el físico matemático holandés Christiaan Huygens (1629-1695) lo resolvieron también, pero la solución de Huygens utilizaba un método geométrico más críptico. El hecho de que Johann lograse resolver un problema que había frustrado los intentos de su hermano y maestro, Jakob, seguía suponiendo una tremenda satisfacción para el joven Bernoulli hasta trece años después de la muerte de Jakob. En una carta que Johann escribió al matemático francés Pierre Rémond de Montmort (1678-1719), no podía ocultar su complacencia: "*Dice que mi hermano planteó este problema, y es cierto, pero ¿puede acaso colegirse que disponía de una solución para él?*"

En absoluto. Cuando planteó el problema después de que yo se lo sugiriese (ya que yo fui el primero que pensó en él), ninguno de los dos fuimos capaces de encontrar la solución y, perdida la esperanza, lo calificamos de insoluble, hasta que el Sr. Leibniz publicó en el boletín de Leipzig de 1690, p. 360, que había resuelto el problema,pero no publicó la solución para dar tiempo a otros analistas; y esto fue lo que nos animó a mi hermano y a mí a volver a él con un nuevo enfoque. Después de atribuirse con todo descaro la propiedad incluso de la sugerencia del problema, Johann prosigue con mal disimulado deleite: "Los esfuerzos de mi hermano no se vieron premiados por el éxito; yo, por mi parte, fui más afortunado, ya que hallé la habilidad (y lo digo sin presunción; ¿por qué habría de ocultarlo?) de resolverlo en su totalidad... Es cierto que su estudio me robó el sueño durante una noche entera... pero, a la mañana siguiente, lleno de júbilo, fui al encuentro de mi hermano, que seguía batallando miserablemente con este nudo gordiano sin llegar a ninguna parte, pensando como Galileo que la catenaria era una parábola. «¡Detente! ¡Detente!», exclamé, «¡deja de torturarte para intentar demostrar la identidad de la catenaria con la parábola, puesto que es falsa!...». Y ahora me asombro al ver que concluye que mi hermano halló un método para resolver este problema... Y yo le pregunto, ¿cree en realidad que, si mi hermano hubiese resuelto el problema en cuestión, habría sido tan atento conmigo como para no aparecer en la lista de los que lo solucionaron, con el fin de cederme la gloria de aparecer

Diseño y formación editorial: L.D.G. Luis Enrique Vite Rangel

en solitario en escena como el primero que lo resolvió, junto con los Srs. Huygens y Leibniz?"

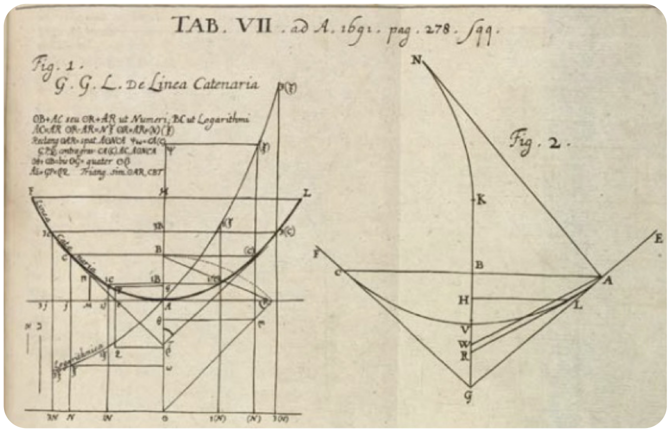


Ilustración 1 Soluciones remitidas por Leibniz y Huygens a Bernouille para su publicación en Acta Eruditorum (1691)

Por si era necesaria alguna prueba de que los matemáticos son, después de todo, humanos, he aquí esta historia. Sin embargo, esta rivalidad familiar no quita mérito alguno a los logros de los Bernoulli. Durante los años posteriores al episodio de la catenaria, Jakob, Johann y Daniel Bernoulli (1700-1782) no sólo resolvieron otros problemas similares de cuerdas que cuelgan, sino que lograron un progreso general de la teoría de ecuaciones diferenciales y resolvieron el problema del movimiento de proyectiles en un medio con resistencia.

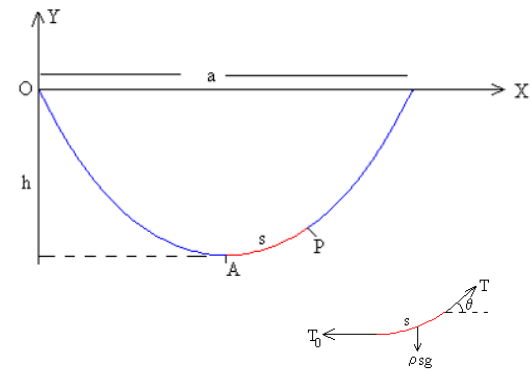
La historia de la catenaria ilustra otra faceta de la potencia de las matemáticas: incluso los problemas físicos de apariencia más trivial poseen soluciones matemáticas. A propósito, la propia forma de la catenaria sigue haciendo las delicias de los millones de visitantes del famoso Gateway Arch en Saint Louis, Missouri. El arquitecto finés-americano Eero Saarinen (1910-1961) y el ingeniero de estructuras germano-americano Hannskarl 0 (1925-1993) diseñaron esta icónica estructura con una forma similar a la de una catenaria invertida.

Ilustración 2 La catenaria invertida

Descripción matemática de la catenaria

Para describir matemáticamente la ecuación de la catenaria es importante realizar las siguientes consideraciones.

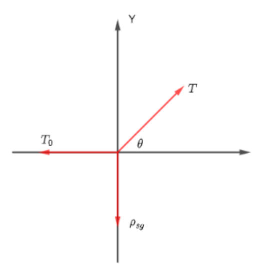
Consideremos un cable de longitud L sujeto por sus dos extremos que están situados a la misma altura y que distan uno del otro. Sea ρ la densidad del cable (masa por unidad de longitud).



Suponiendo que la masa esta distribuida uniformemente se tiene que:

$$\rho = \frac{m_T}{l_T} = \frac{dm}{ds} \Rightarrow m = \rho s$$

considerando el siguiente diagrama de cuerpo libre tenemos:



$$\sum F_x = 0$$
$$T_0 = Tcos\theta \quad (1)$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\rho_{sg} = Tsen\theta \ (2)$$

$$\frac{Tsen\theta}{Tcos\theta} = tan\theta = \frac{\rho_{sg}}{T_0}$$

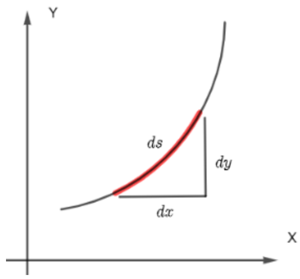
Considerando que $tan\theta = \frac{dy}{dx}$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho gs}{T_0} \quad (3)$$

Derivando la ecuación (3) tenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T_0}\frac{ds}{dx} \quad (4)$$

Considerando que:



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Se tiene que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T_0}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Si consideramos que $a = \frac{T_0}{\rho g}$ la ecuación diferencial queda de la siguiente forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Por lo que la solución de esta ecuación diferencial es:

$$y(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

La catenaria en nuestra vida

Podemos observar el fenómeno de la catenaria en:

- Cables colgantes entre dos postes.

- Puentes colgantes

- Arquitectura de la catenaria invertida.

Conclusión

La catenaria representa un ejemplo clásico de cómo las matemáticas describen fenómenos físicos de manera precisa. Esta curva, surge del equilibrio de fuerzas en una cuerda perfectamente flexible y homogénea sometida únicamente a la gravedad. La catenaria, refleja con exactitud el comportamiento real de cables y cadenas suspendidos.

Su estudio es fundamental no solo en los cursos de cálculo y física, sino que también tiene aplicaciones relevantes en ingeniería civil, arquitectura y diseño estructural, donde se busca optimizar la resistencia y estabilidad de estructuras como puentes colgantes y arcos autoportantes.

Bibliografía

- ¿Es DIOS un Matemático?, Mario Livio, epublibre,2009
- HANDY RL. The igloo and natural bridge as ultimate structures. Disponible en: http://pubs.aina.ucalgary.ca/arctic/Arctic26-4-276.pdf
- http://www.nps.gov/jeff/index.htm
- http://www.absoluteastronomy.com/topics/Catenary

Diseño y formación editorial: L.D.G. Luis Enrique Vite Rangel