CIENCIA BÁSICA Y CULTURA

Boletín de Ciencias Básicas

Año 2025 Número 22 30 de julio

Matemáticas en Ingeniería

Pablo García y Colomé
Coordinación de Matemáticas de la DCB

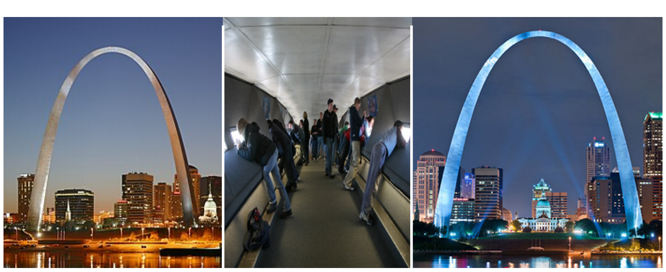
Revisor: Fernando Sánchez Rodríguez
Coordinación de Ciencias Aplicadas de la DCB

Arco Gateway

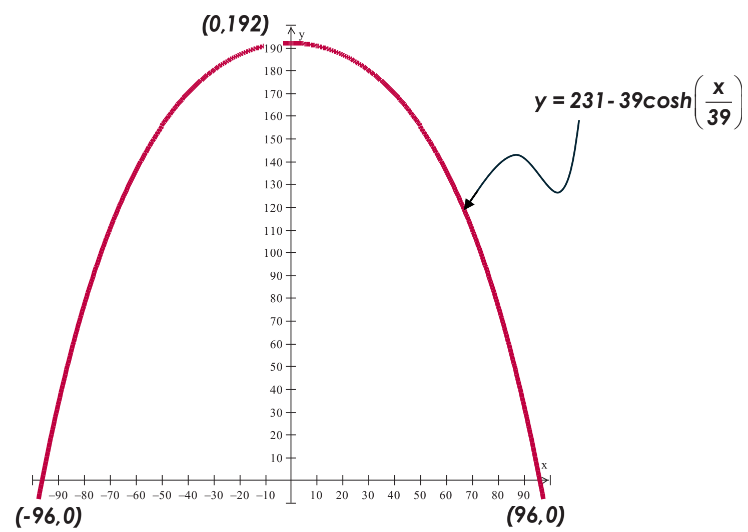
El Arco Gateway, construido en la ciudad de San Luis Misuri, EUA, es un monumento conmemorativo que rememora el crecimiento del país hacia el oeste. Se trata de una catenaria invertida, esto es, de una función coseno hiperbólico invertido, cuya ecuación matemática está dada por:

$$y = 231 - 39\cosh\left(\frac{x}{39}\right)$$

Geométricamente, en un sistema coordenado ***xy***, en concordancia con la ecuación anterior, cuando ***x = 0***, el arco tiene de altura ***192 m***, que es la ordenada máxima de la curva. Además, de extremo a extremo en la base (entre las "patas"), tiene ***192 m***. Se construyó de febrero de 1963 a mayo de 1965 y ese año, en octubre, se inauguró. Lo diseñaron en 1947, el arquitecto estadounidense de origen finlandés Eero Saarinen (también con nacionalidad norteamericana) y el ingeniero de estructuras alemán Hannskarl Bandel. Tiene muros, de acero con concreto armado, y sus secciones son triángulos equiláteros con lados que cambian de ***16 m*** a ***5.2 m*** por lado. Se trata de una estructura hueca que alberga un modo de tranvía para los visitantes que desean subir al observatorio en la parte más alta, que tiene ***20 m*** de largo por ***2.1 m*** de alto. Resiste terremotos y vientos de hasta ***240 km/h***. Tiene un peso de ***38,898 ton***. En un día límpido, la vista alcanza los ***50 km*** . Cada año vistan este arco ***4*** millones de turistas de los que un millón sube al observatorio.



La gráfica de este arco, en un sistema coordenado cartesiano, se muestra en la siguiente figura, donde es posible calcular, de manera aproximada el área bajo la curva y la longitud del arco. Así, mediante las expresiones estudiadas en el Cálculo Integral, se obtiene:



Cálculo del área bajo la curva

$$A = 2\int_0^{96} f(x)\,dx$$

$$A = 2\int_0^{96}\left[231 - 39\cosh\left(\frac{x}{39}\right)\right]dx = 2\left[231x - 39^2\operatorname{senh}\left(\frac{x}{39}\right)\right]_0^{96} = 2(22{,}176 - 8{,}850)$$

$$\therefore \quad A = 26{,}652\ m^2$$

Cálculo de la longitud del arco

$$L = 2\int_0^{96}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$y = 231 - 39\cosh\left(\frac{x}{39}\right) \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{senh}\left(\frac{x}{39}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{39}\right)$$

$$L = 2\int_0^{96}\sqrt{1+\operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{39}\right)} = \int_0^{96}\cosh\left(\frac{x}{39}\right)dx = 2\left[39\operatorname{senh}\left(\frac{x}{39}\right)\right]_0^{96}$$

$$\therefore \quad L \approx \ 454\ m$$

Anécdota en clase: estaba explicando aplicaciones de la integral definida y, cuando platiqué y resolví el problema del arco Gateway, un alumno me dijo que le encantaría ir a visitarlo, subir con un pizarrón pequeño, decirles a los turistas que estudiaba ingeniería en la UNAM y explicarles lo que son las funciones hiperbólicas y calcular el área bajo la curva y la longitud del arco. ¡Ojalá haya cumplido o cumpla su deseo!

Aterrizaje de un jet comercial

Un avión jet comercial aterriza a una velocidad de $280\ \dfrac{km}{h}$, una aceleración de frenado de $38{,}880\ \dfrac{km}{h^2}$ y sus distancias de recorrido en pista están dadas por $s = 280t - 1944$. En esta expresión, "***t***" es el tiempo en horas, en el que recorre la distancia de pista "***s***".

Se quiere determinar la velocidad de la aeronave cuando han pasado ***16s*** de que su tren de aterrizaje tocó tierra, así como la distancia total que recorre hasta que se detiene y el tiempo que se tarda en hacerlo. Se asume que desde que aterriza aplica el sistema de frenado hasta pararse totalmente.

También se pide analizar la función de la distancia de pista "***s***" en términos del tiempo "***t***", que evidentemente es un fragmento de una parábola, en cuyo vértice se encuentran el tiempo y la distancia totales hasta que la aeronave se detiene con su sistema de frenado.

Solución.

Se deriva "***s***", se obtiene la velocidad y en esta se sustituye el tiempo "***t***", pero en horas. Luego,

$$s = 280t - 19440\,t^2 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{ds}{dt} = s' = 280 - 38880\,t$$

$$t = 16\ s = \frac{16}{3600}\,h = 0.0044\ h$$

$$v = 280 - 38880\,(0.0044) \quad \Rightarrow \quad v = 280 - 171$$

$$\therefore \quad v = 109\ \frac{km}{h}$$

que es la velocidad a la que va el jet a los segundos de haber aterrizado.

Al detenerse el avión su velocidad es cero, por lo que, al igualar la expresión que la define a cero, es posible calcular el tiempo que tarda en detenerse y, sustituyendo este tiempo en , se tendrá la distancia que empleó en pararse totalmente.

$$v = 280 - 38880\,t \quad ; \quad v = 0 \quad \Rightarrow \quad 280 - 38880\,t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{280}{38880}$$

$$\therefore \quad t = 0.0072\ h \quad \Rightarrow \quad t = 26\ s$$

$$s = 280t - 19440\,t^2 \quad \Rightarrow \quad s = 280(0.0072) - 19440\,(0.0072)^2$$

$$s = 1.0\ km$$

Es decir, que la aeronave en cuestión necesita aproximadamente ***1.0 km = 1000 m*** metros para detenerse y un tiempo de ***26*** segundos para hacerlo. Es evidente que no se detiene, sino que, a baja velocidad sigue rodando o "carreteando" hasta su lugar de desembarque de los pasajeros.

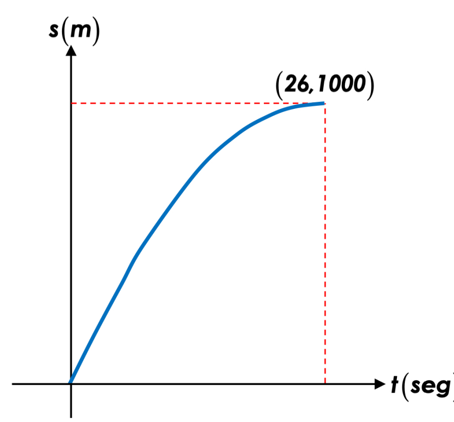
Para analizar la función ***s(t)*** y su gráfica aproximada, se utilizan metros y segundos y se hace lo siguiente:

$$s = 280t - 19440\,t^2 \quad \Rightarrow \quad s = 77.78t - 1.5t^2$$

$$\Rightarrow \quad -1.5\left(t^2 - 51.85t + 676 - 676\right) = s$$

$$t^2 - 51.85t + 676 = -s + 1000 \quad \Rightarrow \quad (t - 26)^2 = -(s - 1000)$$

Parábola con vértice en ***(26,1000)*** y abre hacia abajo. Se utilizarán escalas diferentes para dar más claridad al problema. Como es observa, las coordenadas del vértice son, respectivamente, el tiempo y la distancia de la aeronave al detenerse totalmente con los datos aportados al principio. Es relevante cómo las matemáticas intervienen en la ingeniería.



Anécdota: Cuando he resuelto este problema con los alumnos, estos invariablemente se muestran interesados, al grado de empezar a preguntar sobre los vuelos. Se interesan sobre todo en el por qué del vuelo. Y les dejo un trabajo de investigación al respecto en equipos.

Diseño y formación editorial: L.D.G. Luis Enrique Vite Rangel