CIENCIA BÁSICA Y CULTURA

Boletín de Ciencias Básicas

Año 2024 Número 3 06 de febrero

Ejercicio de Termodinámica

Rogelio Soto Ayala
(Departamento de Física y Química de la DCB)

Una masa m de líquido, a una temperatura T_1 (componente 1) se mezcla con una cantidad igual del mismo líquido a la temperatura T_2 (componente 2) en un recipiente aislado térmicamente.

a) Demuestre que el cambio de entropía del universo es:

$$\Delta S_u = 2mc\ ln\frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}}$$

b) Determine el cambio de entropía del universo (J/K), cuando se mezclan $500\,g$ de agua líquida a 25^oC con $500\,g$ de agua líquida a 50^oC. Caracterice el tipo de proceso que se lleva a cabo.

c) Haga una gráfica que indique cómo varía el cambio de entropía del universo, cuando la mezcla se prepara al mantener constante la temperatura del componente 1, mientras que la temperatura del componente 2 va disminuyendo gradualmente hasta llegar al valor de 25^oC.

d) Demuestre, mediante la expresión del inciso a), que, cuando la mezcla tiene lugar entre los dos fluidos a las mismas temperaturas iniciales, el proceso que se lleva a cabo es reversible.

Solución

a) En termodinámica, el concepto de universo se refiere a la combinación entre un sistema termodinámico y sus alrededores. De esta forma, el cambio de entropía del universo, en un proceso, será la suma del cambio de entropía del sistema y del cambio de entropía de los alrededores:

$$\Delta S_u = \Delta S_{sma} + \Delta S_{alr}$$

Ya que la mezcla se lleva a cabo en un recipiente aislado térmicamente, el cambio de entropía de los alrededores vale cero y la expresión anterior se simplifica a:

$$\Delta S_u = \Delta S_{sma}$$

El sistema termodinámico, por otra parte, está conformado por los dos líquidos que forman la mezcla. Así, el cambio de entropía del universo será la suma de los cambios de entropía que experimenta cada uno de ellos.

$$\Delta S_u = \Delta S_{sma} = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

El cambio de entropía de cada componente está dado por la siguiente expresión:

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} \frac{\delta Q}{T}$$

en la cual la diferencial del calor se expresa como $\delta Q = mcdT$ donde m representa a la masa, c a la capacidad térmica específica, y dT a la diferencial de temperatura que experimenta cada uno de los líquidos en el proceso. Al sustituir δQ en la expresión anterior e integrar, se obtiene:

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} \frac{mcdT}{T} = mc\ ln\frac{T_f}{T_i} = mc\ ln\frac{T_{eq}}{T_i}$$

T_i y T_f se refieren a las temperaturas inicial y final de cada componente, respectivamente. Sin embargo, T_f corresponde también a la temperatura de equilibrio de la mezcla, T_{eq}, la cual se obtiene de la manera siguiente:

$$T_{eq} = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

ecuación que surge como resultado de un balance de energía entre los dos componentes. Esta ecuación se simplifica mucho considerando que la mezcla está formada por los mismos líquidos, de igual masa y con el mismo valor de capacidad térmica específica. Así, la temperatura de equilibrio, en este caso particular, está dada por:

$$T_{eq} = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Por otra parte, el cambio de entropía del universo se puede expresar como:

$$\Delta S_u = mc\ ln\frac{T_{eq}}{T_1} + mc\ ln\frac{T_{eq}}{T_2} = mc\left\{ln\frac{T_{eq}}{T_1} + ln\frac{T_{eq}}{T_2}\right\}$$

pero ya que la suma de los logaritmos corresponde al logaritmo de su producto, la expresión anterior queda como:

$$\Delta S_u = mc\,\ln\left\{\frac{(T_{eq})^2}{T_1T_2}\right\}$$

Al insertar la temperatura de equilibrio en la ecuación se obtiene:

$$\Delta S_u = mc\,\ln\left\{\frac{\left(\frac{T_1+T_2}{2}\right)^2}{T_1T_2}\right\} = mc\,\ln\left\{\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2}\right\},$$

que se puede escribir como $\Delta S_u = mc\ \ln\left(\frac{T_1+T_2}{2\sqrt{T_1T_2}}\right)^2$

y como el logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo de la base de la potencia, se llega a:

$\Delta S_u = 2mc\ \ln\frac{T_1+T_2}{2\sqrt{T_1T_2}}$, que es lo que se deseaba demostrar.

b) Al sustituir datos en la ecuación anterior se tiene que:

$$\Delta S_u = 2mc\ \ln\frac{T_1+T_2}{2\sqrt{T_1T_2}} = 2(0.50\ kg)\left(4186\ \frac{J}{kg\ K}\right)\ln\frac{298.15\ K+323.15\ K}{2\sqrt{(298.15\ K)(323.15\ K)}} = 3.392\ \frac{J}{K}$$

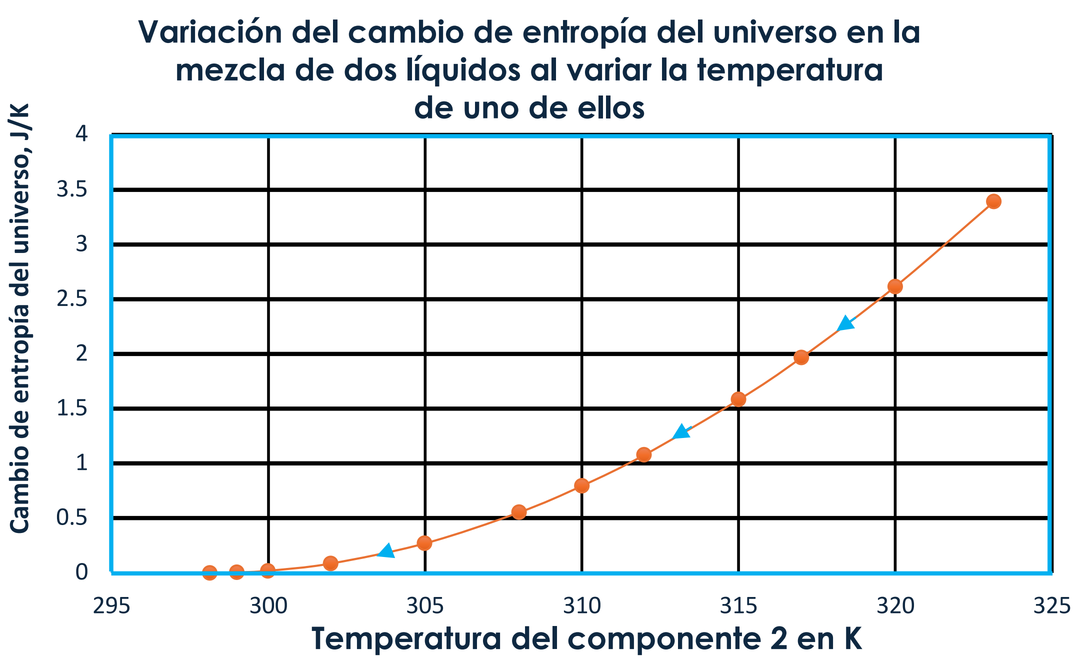
Ya que el cambio de entropía del universo es mayor que cero, el proceso de mezclado es irreversible.

c) Si se observa la expresión que cuantifica el cambio de entropía del universo, esta depende de las temperaturas iniciales de cada uno de los componentes. Así, se mantiene fija la temperatura del agua que está a **25°C** y se va disminuyendo la temperatura de la otra muestra de agua, al preparar la mezcla; esto equivale a graficar la siguiente función:

$$\Delta S_u = 2mc\ \ln\frac{T_1+T_2}{2\sqrt{T_1T_2}} = \left(4186\ \ln\frac{298.15+T}{2\sqrt{298.15\ T}}\right)\frac{J}{K}$$

donde *T* es la temperatura de la muestra 2, que disminuye gradualmente desde 50°*C*(323.15 *k*) hasta 25°*C*(298.15 *k*). Los valores que se obtienen y la gráfica correspondiente se muestran a continuación:

T (K)	ΔSu (J/K)
323.15	3.39155108
320	2.61671135
317	1.96622792
315	1.58124664
312	1.07871683
310	0.79481667
308	0.55276281
305	0.26997759
302	0.08613507
300	0.0200214
299	0.00424073
298.15	0



d) En un proceso reversible, el cambio de entropía del universo vale cero. Para que esto ocurra, el término $\frac{T_1+T_2}{2\sqrt{T_1T_2}}$ en la expresión del cambio de entropía del universo debe valer uno, esto es, $\frac{T_1+T_2}{2\sqrt{T_1T_2}} = 1$, que implica que $T_1+T_2 = 2\sqrt{T_1T_2}$

$$(T_1+T_2)^2 = 4T_1T_2 \quad\Rightarrow\quad T_1^2+2T_1T_2+T_2^2 = 4T_1T_2 \quad\Rightarrow\quad T_1^2-2T_1T_2+T_2^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad (T_1-T_2)^2 = 0 \quad\therefore\quad T_1 = T_2$$

Lo cual significa que, cuando la temperatura de los líquidos que forman la mezcla es la misma, el proceso es reversible. De hecho, este es el criterio que caracteriza a un proceso de este tipo: que la transferencia de calor se lleve a cabo como consecuencia de una diferencia infinitesimal de temperatura entre dos sistemas o entre un sistema y el entorno.

En el caso de la mezcla de los dos líquidos, a medida que la diferencia de temperatura entre ellos se hace más pequeña, el proceso se hace menos irreversible, hasta que, en el límite, cuando las temperaturas de ambos son las mismas, el proceso es reversible.

Una aplicación del **cálculo integral** de **dos variables** en el **tema** de **funciones** de **probabilidad conjunta** de la **asignatura** de **probabilidad**

Octavio Estrada Castillo.
octavioe@unam.mx
Veduar Allié Sarmiento Torres.
allie@unam.mx

Problema: Un taladro de precisión, colocado sobre un punto deseado, hará un agujero aceptable si queda dentro de una distancia de cinco micras del punto deseado. Usando el punto deseado como origen del sistema de coordenadas rectangulares y suponiendo que las coordenadas (*x*,*y*) del punto de contacto son variables aleatorias con la distribución de probabilidad conjunta:

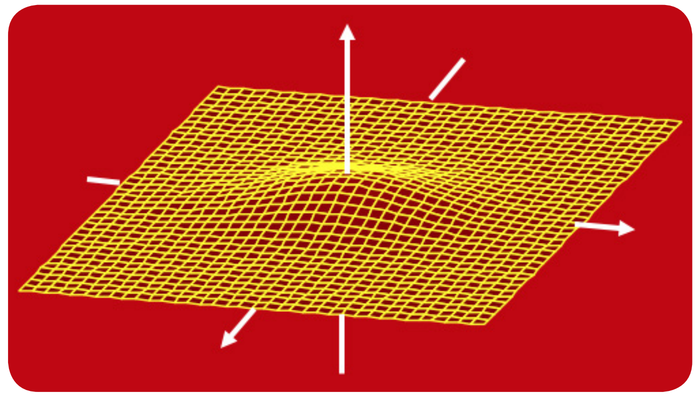
$$f_{xy}(x,y)=\frac{1}{8\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \quad x\in \quad ; y\in$$

a) Demuestre que se trata de una función de probabilidad conjunta

Se dice que *f*(*x*,*y*) es una *función de probabilidad bivariada continua,* si para cada pareja ordenada (*x*,*y*) del dominio de definición de *x* y *y* existe un número *f*(*x*,*y*) que cumple las siguientes propiedades:

$$i) \qquad f(x,y)\geq 0 \quad \begin{cases}\forall x\in \text{Dominio de } x\\ \forall y\in \text{Dominio de } y\end{cases}$$

En una gráfica aproximada de la función es posible ver que la función siempre es positiva.



Además, es posible ver que cuando las variables x y y valen cero, la función adquiere su mayor valor (máximo absoluto de la función escalar de variable vectorial) que es $1/8\pi \approx 0.04$. Por la regla de correspondencia de la función, mientras mayores sean los valores de x y y la función será menor, pero con signo positivo, luego nunca será negativa, por lo que su gráfica será "asintótica" al plano xy, lo que quiere decir que la gráfica nunca pasará al lado inferior de dicho plano. Entonces se cumple la propiedad ***i)***.

$$ii) \qquad \iint_{\forall x \forall y} f(x,y)\,dy\,dx=\iint_{\forall y\forall x} f(x,y)\,dx\,dy=1$$

$$\frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dx\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dx\,dy$$

Es más sencillo resolver esta integral en coordenadas polares, donde hay que considerar el elemento diferencial de área en estas coordenadas, que es $dA = dx\,dy = r\,dr\,d\theta$, tal que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{m\to\infty}\int_0^m e^{-\frac{r^2}{2}}r\,dr\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{m\to\infty}\left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^m d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{m\to\infty}\left[-\frac{1}{e^{\frac{m^2}{2}}}+1\right]d\theta=\frac{1}{2\pi}[\theta]_0^{2\pi}=1$$

lo que queda demostrado.

b. Obtener la función de probabilidad conjunta acumulada

$$F(x,y)=\frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}du\,dv=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{r}e^{-\frac{t^2}{2}}t\,dt\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^r=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left[1-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]d\theta$$

$$F(x,y)=\frac{1}{2\pi}\left[\left(1-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)\theta\right]_0^{2\pi}=\left(1-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)$$

$$F(x,y)=1-e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\quad \forall x\in R,y\in R$$

c. Obtener la probabilidad de que el barrenado sea aceptable.

Las coordenadas del centro del barrenado son (x, y) y debe estar a cinco micras del origen cuando mucho, por lo que se pide calcular:

$$p\left(\sqrt{x^2+y^2}\le 5\right)$$

También:

$$p\left(x^2+y^2\le 25\right)$$

$$p\left(y\le\sqrt{25-x^2}\right)=\frac{2\cdot 2}{8\pi}\int_0^5\int_0^{\sqrt{25-x^2}}e^{-\frac{1}{8}(x^2+y^2)}dydx$$

Esta integral también se resuelve en coordenadas polares, por lo que se incluye el diferencial de área en estas coordenadas:

$$p(r\le 5)=\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^5 e^{-\frac{1}{8}r^2}rdrd\theta$$

$$p(r\le 5)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[-e^{-\frac{r^2}{8}}\right]_0^5 d\theta$$

$$p(r\le 5)=\frac{1}{2\pi}\left[1-e^{-\frac{25}{8}}\right]\left[\theta\right]_0^{2\pi}=1-e^{-\frac{25}{8}}$$

$$p(r\le 5)=0.956063$$

¡FELICIDADES UNAM!

Tras llegar a la órbita lunar, la misión mexicana Colmena UNAM concluye con 75% de sus objetivos cumplidos con éxito. La nave Peregrine se separó del cohete para bajar a la Luna. Por una fuga de combustible se debió cancelar el alunizaje, pero la nave alcanzó la órbita lunar. La tecnología mexicana del proyecto universitario Colmena UNAM, de cinco micro robots, con un módulo de telecomunicaciones, demostró perfecto funcionamiento en el espacio profundo a más de 38 mil kilómetros por hora de la Tierra, hecho que sólo muy pocos países han logrado, entre los que ya podemos incluir a México.