

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS

BOLETÍN

OCTUBRE 2011
SEMESTRE 2012-1



Nueva época, No. 11

Autor: Hugo Germán Serrano Miranda

1 Las integrales vectoriales

El núcleo formal que sustenta la disciplina de la física matemática lo constituye las integrales vectoriales, sin duda alguna se puede afirmar que, sin la presencia de estas componentes conceptuales, no existiría esta disciplina.

Una descripción y clasificación de las integrales vectoriales se expone de manera magistral y detallada en la obra *CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES, interpretación física*, de Richmond B. McQuistan¹. Este libro se dio a conocer en 1966. El autor de esta obra, además de dedicarse a la investigación científica, se le puede considerar un visionario de su época en el campo de la enseñanza en matemáticas, ya que ha desarrollado nuevos métodos de enseñanza-aprendizaje para estudiantes de ingeniería, en la disciplina del análisis vectorial vinculado con la teoría de los campos.

Esta obra se recomienda ampliamente, a pesar de tener 45 años de haberse editado, ya que constituye uno de los primeros intentos en enfatizar el significado físico del álgebra, el cálculo, los operadores y la teoría de las transformaciones asociados con los campos escalares y vectoriales. Conviene señalar que hace 45 años, en en los planes de estudio de nuestra Facultad, todavía no se vislumbraba como asignatura básica el cálculo vectorial.

A continuación, se expone un resumen de la descripción y clasificación de las integrales vectoriales, que se discuten en esta obra, y posteriormente en la siguiente edición de este boletín, se resolverán algunos problemas relacionados con estos tópicos.

¹Editorial Limusa-Wiley, S.A. México, 1969

2 ¿Qué es una integral vectorial?

Sea un vector $\vec{F}(q)$, que depende de la variable q ², el resultado de la integración de este vector, es el vector $\vec{G}(q)$, que al derivarlo con respecto a q , nos da como resultado $\vec{F}(q)$. Entonces, como la derivada de un vector constante \vec{C} es cero, la integral indefinida del vector $\vec{F}(q)$ puede ser escrita

$$\int \vec{F}(q) dq = \vec{G}(q) + \vec{C}$$

Como ya se mencionó, \vec{C} es un vector constante, es decir, \vec{C} no es función de q , ya que $\frac{d\vec{G}}{dq} = \vec{F}(q)$. Si el escalar q varía continuamente entre dos límites definidos q_1 y q_2 y representa la suma de los elementos del vector diferencial $d\vec{G} = \vec{F}(q) dq$ conforme q varía entre q_1 y q_2 como ha sido discutido. La integral vectorial también puede ser considerada como la integración escalar de las componentes del integrando.

3 Clasificación de las integrales vectoriales

Existen tres categorías generales de integrales de cantidades vectoriales que dependen de varias variables independientes.

a) El integrando es una función escalar y la diferencial es un vector, pero ambas, el integrando y la diferencial, son funciones de n variables independientes $q_1, q_2 \dots q_n$, es decir

$$\int f(q_1, q_2 \dots q_n) d\vec{F}(q_1, q_2 \dots q_n)$$

b) El integrando es una función vectorial y la diferencial una función escalar de las variables escalares independientes $q_1, q_2 \dots q_n$, es decir

$$\int_{q_1} \int_{q_2} \dots \int_{q_n} \vec{G}(q_1, q_2 \dots q_n) dq_1 dq_2 \dots dq_n$$

c) El integrando y la diferencial son funciones vectoriales de n variables independientes $q_1, q_2 \dots q_n$, bajo este criterio puede tenerse dos operaciones:

c.1) Cuando el integrando y la diferencial forman un producto escalar

$$\int \vec{G}(q_1, q_2 \dots q_n) \cdot d\vec{F}(q_1, q_2 \dots q_n)$$

c.2) Cuando el integrando y la diferencial forman un producto vectorial

$$\int \vec{G}(q_1, q_2 \dots q_n) \times d\vec{F}(q_1, q_2 \dots q_n)$$

Estos son los casos generales de la clasificación de integrales vectoriales, sin embargo, las integrales del tipo c) donde el integrando y la diferencial son funciones vectoriales, aparecen en

²Por ejemplo la posición $\vec{r}(t)$ de una partícula depende de la variable t .

muchas de las aplicaciones en las disciplinas como la mecánica clásica y la termodinámica; este tipo de integrales de línea involucra necesariamente el vector desplazamiento $d\vec{r}$, el cual forma parte del concepto fundamental de trabajo y que se expresa a partir de la idea de una integral de línea de la forma c.1).

4 Integrales de línea

Una de las integrales de línea más importantes, donde aparece el vector $d\vec{r}$, es la siguiente: la suma de las magnitudes de las componentes del campo vectorial \vec{F} que son tangentes a la curva Γ (rectificable, regular y lisa) del espacio ³. Dado que una curva Γ , en un intervalo $t_i < t < t_f$ se puede representar por el vector de posición y t es cualquier parámetro

$$\vec{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

El vector de desplazamiento diferencial $d\vec{r}$ a lo largo de Γ , y siempre tangente en cualquier punto de ésta, se representa

$$d\vec{r} = dx i + dy j + dz k$$

Y a todas las integrales que incluyen vectores de desplazamiento diferencial $d\vec{r}$ se llaman integrales de línea. Una integral de este tipo, es el trabajo que realiza una fuerza al mover una partícula, a lo largo de una trayectoria plana, desde una posición P_1 hasta una posición P_2 . La expresión que caracteriza este concepto mecánico es

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

La interpretación geométrica de este concepto es la siguiente⁴.

En la figura 1 se muestra una trayectoria plana Γ por donde se mueve una partícula bajo la acción de un campo vectorial de fuerzas. si el conjunto de fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ están ligadas al movimiento de la partícula, y tienen correspondencia con los puntos $1, 2, 3, \dots, n$ asociados con la trayectoria (para el caso que nos ocupa $n = 7$).

³Una curva Γ es *rectificable* entre dos puntos P_1 y P_2 si es posible establecer su longitud, *regular* si existe la tangente en cada punto y *lisa* si no tiene cambios abruptos la derivada en cada uno de sus puntos.

⁴Todas las interpretaciones que se realicen en este artículo, acerca de estas integrales de línea, se formularán en el plano, con el fin de facilitar su comprensión geométrica.

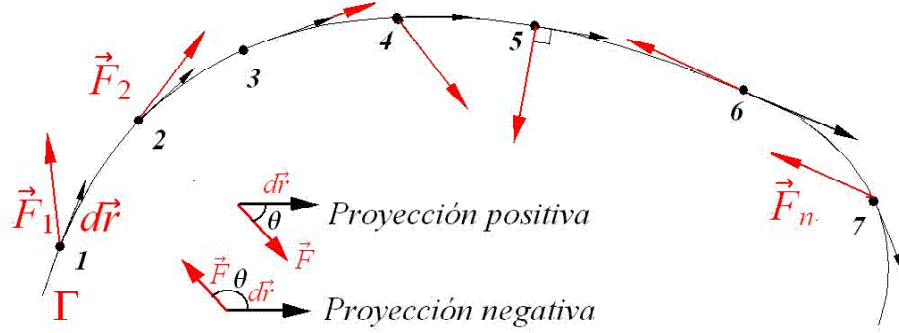


Figura 1

Campo de fuerzas vectorial actuando sobre una partícula a lo largo de una trayectoria plana, interpretación de $\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Se tiene que la integral de línea, interpretada como una suma, esta dada por

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lim_{|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \lim_{|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} (\vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r}_2 + \dots + \vec{F}_n \cdot \Delta\vec{r}_n)$$

Y por la definición de producto punto

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lim_{|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} (|\vec{F}_1| |\Delta\vec{r}_1| \cos \theta_1 + |\vec{F}_2| |\Delta\vec{r}_2| \cos \theta_2 + \dots + |\vec{F}_n| |\Delta\vec{r}_n| \cos \theta_n)$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |\vec{F}_i| |\Delta\vec{r}_i| \cos \theta_i$$

Observaciones:

- 1) En los puntos 1, 2 y 4 de la trayectoria, las proyecciones son positivas, es decir los términos $|\vec{F}_i| |\Delta\vec{r}_i| \cos \theta_i$ con $i = 1, 2$ y 4 ; tienen signo positivo, ya que $0^\circ < \theta_i < 90^\circ$. El punto 3 de la trayectoria también tiene proyección positiva, es un caso especial para el cual $\theta = 0^\circ$.
- 2) En los puntos 6 y 7 de la trayectoria, las proyecciones son negativas, es decir los términos $|\vec{F}_i| |\Delta\vec{r}_i| \cos \theta_i$ con $i = 6$ y 7 ; tienen signo negativo, ya que $90^\circ < \theta_i < 180^\circ$. El punto 6 de la trayectoria es un caso especial para el cual $\theta = 180^\circ$.
- 3) La proyección en el punto 5, $|\vec{F}_5| |\Delta\vec{r}_5| \cos \theta_5 = 0$, ya que $\theta_5 = 90^\circ$.

Con base en las observaciones anteriores, puede darse otra interpretación más general, como la que se expone a continuación.

Suponga cuatro trayectorias, y el esquema del campo de fuerzas que se muestra en la figura 2.

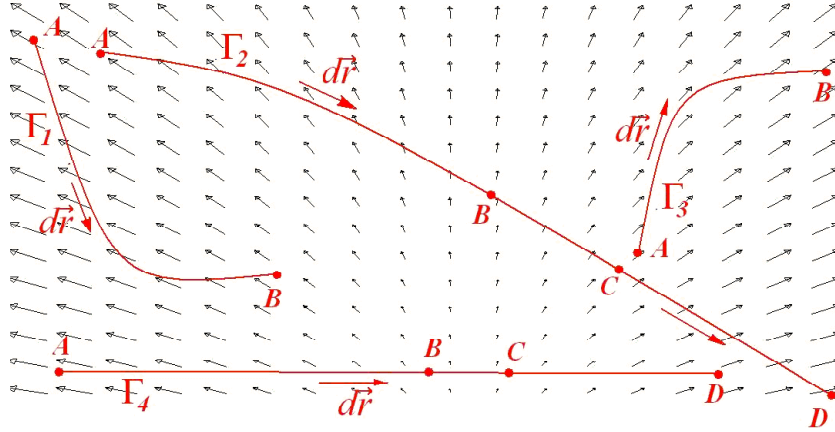


Figura 2

*Campo de fuerzas en un plano y cuatro trayectorias
arbitrarias independientes*

Para cada una de las trayectorias y a lo largo de todos los puntos que la determinan, está definida una *flechita del campo vectorial*, es decir, a cada punto del plano le corresponde *una y sola una* representación de segmento dirigido que determina: la magnitud, dirección y sentido de esta propiedad física. Con base en esta propiedad de unicidad que se le asocia a cada punto de la trayectoria con el campo en cuestión, la interpretación cualitativa de la integral de línea para cada una de estas trayectorias es la siguiente:

a) A lo largo de la trayectoria Γ_1

$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} =$ Cantidad numérica negativa, ya que la suma de todas las proyecciones son negativas.

b) A lo largo de la trayectoria Γ_2

$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} =$ Cantidad numérica negativa, $\int_C^D \vec{F} \cdot d\vec{r} =$ Cantidad numérica positiva y la integral $\int_B^C \vec{F} \cdot d\vec{r} =$ Cantidades numéricas negativas + Cantidades numéricas positivas, y posiblemente una o varias componentes nulas.

c) A lo largo de la trayectoria Γ_3

$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} =$ Cantidad numérica positiva, ya que la suma de todas las proyecciones son positivas.

d) A lo largo de la trayectoria Γ_4

$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} =$ Cantidad numérica negativa, $\int_C^D \vec{F} \cdot d\vec{r} =$ Cantidad numérica positiva y la integral $\int_B^C \vec{F} \cdot d\vec{r} =$ Cantidades numéricas negativas + Cantidades numéricas positivas, y posiblemente una o varias componentes nulas. La diferencia con respecto a la trayectoria Γ_2 (y con todas las anteriores), es que en este caso $d\vec{r}$ tiene una orientación constante: horizontal y dirigida hacia la derecha.

El otro tipo de integral donde aparece el vector $d\vec{r}$ es la siguiente:

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \times d\vec{r} = \lim_{|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \vec{F}_i \times \Delta\vec{r}_i = \lim_{|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} (\vec{F}_1 \times \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \times \Delta\vec{r}_2 + \dots + \vec{F}_n \times \Delta\vec{r}_n)$$

La suma de los productos vectoriales, de las componentes del campo vectorial \vec{F}_i con $\Delta\vec{r}_i$, donde todos los vectores $\Delta\vec{r}_i$, $i = 1..n$, en el límite cuando $\Delta\vec{r}_i \rightarrow 0$ son tangentes a la curva plana en cada punto i del espacio Γ . Por ejemplo, si este concepto de integral se asocia a la figura 1, la cual se vuelve a repetir, se tiene lo siguiente.

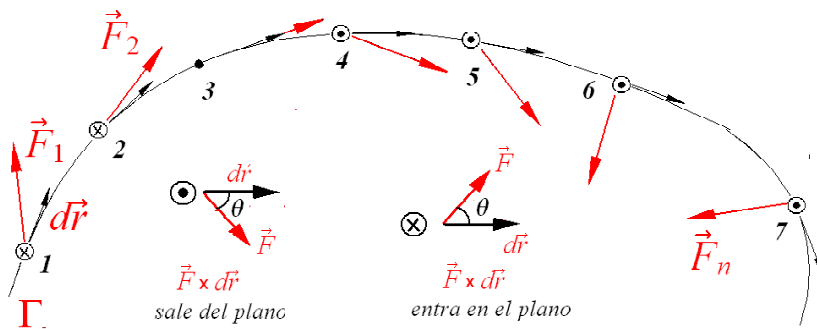


Figura 3

Campo de fuerzas vectorial actuando sobre una partícula a lo largo de una trayectoria plana, interpretación de $\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \times d\vec{r}$

El resultado de esta suma es una cantidad vectorial. A manera de ejercicio interprete la suma vectorial para cada una de las trayectorias de la figura 2. (la solución se publicará en la próxima edición de este boletín).

Por último, el tipo de integrales de la forma

$$\int_{P_1}^{P_2} \Phi(x, y) d\vec{r} = \lim_{|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(x_i, y_i) \Delta\vec{r}_i = \lim_{|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} (\Phi(x_1, y_1) \Delta\vec{r}_1 + \Phi(x_2, y_2) \Delta\vec{r}_2 + \dots + \Phi(x_n, y_n) \Delta\vec{r}_n)$$

Donde $\Phi(x, y)$ es un escalar que tiene un determinado valor en un punto $P(x, y)$ del plano por donde pasa la curva, tal como se muestra en la figura 5-a. El resultado de esta integral curvilínea es una cantidad vectorial.

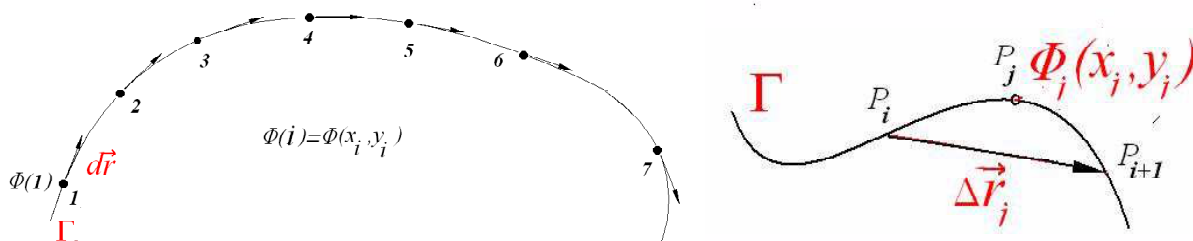


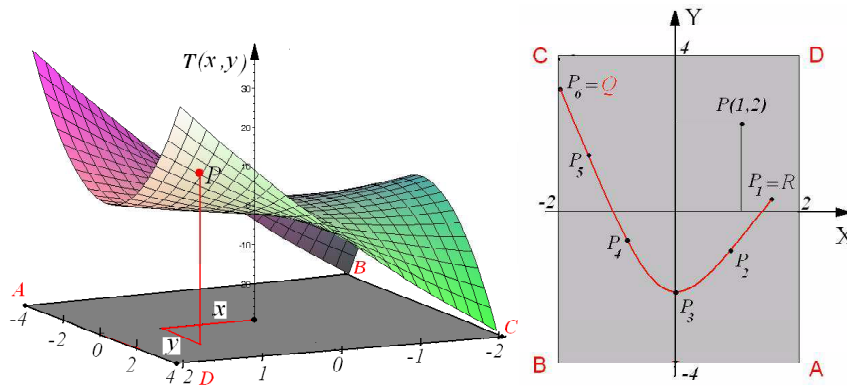
Figura 5-a y 5-b

Campo escalar actuando sobre una partícula a lo largo de una trayectoria plana, interpretación de $\int_{P_1}^{P_2} \Phi(x, y) d\vec{r}$

La interpretación geométrica de la suma $\lim_{|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(x_i, y_i) \Delta\vec{r}_i$, es la siguiente. Con relación a la figura 5-b, se evalúa el *valor promedio* de la función escalar $\Phi_j(x_i, y_i) = \frac{1}{2} (\Phi(x_{i+1}, y_{i+1}) + \Phi(x_i, y_i))$ para cada punto $i < j < i + 1$, de la trayectoria definida por la curva, desde el punto P_1 hasta P_2 , posteriormente se evalúa el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}_j = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i$ en cada una de estas posiciones y por último se realiza la suma de Riemann de los productos $\Phi_j(x_i, y_i) \Delta\vec{r}_j$.

Observaciones:

El campo escalar puede ser una función escalar, en términos de x e y , por ejemplo, si la distribución de temperatura en la placa rectangular de 4 m de base y 8 m de altura, que se muestra en la figura 6-a.



Figuras 6-a y 6-b

Gráfica de la función escalar $T(x, y) = x^2 + xy^2$ y representación de los puntos sobre una trayectoria plana en la placa ABCD

Está dada por la función escalar de dos variables $T(x, y) = x^2 + xy^2$ [$^{\circ}C$], entonces, con respecto al marco de referencia cuyo centro se coloca en el centro de la placa, figura 6-b, el dominio de la distribución de temperatura, acorde con sus dimensiones, corresponderá al conjunto de puntos en el plano $\{P(x, y)/x \in -2 \leq x \leq 2, y \in -4 \leq y \leq 4\}$; así, el punto P con coordenadas $(1, 2)$ en la placa, tendrá una temperatura $T(1, 2) = 1^2 + (1)(2)^2 = 5^{\circ}C$. Ahora bien, la interpretación de la integral de línea a lo largo de una la curva Γ que une los puntos R y Q , está dada por

$$\int_R^Q T(x, y) d\vec{r} = \lim_{|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} T(x_i, y_i) \Delta\vec{r}_i = \lim_{|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} (T(x_1, y_1) \Delta\vec{r}_1 + T(x_2, y_2) \Delta\vec{r}_2 + \dots + T(x_n, y_n) \Delta\vec{r}_n)$$

Con relación a la tabla que se muestra en la siguiente figura, suponga que los 6 puntos de la trayectoria plana, localizados sobre la placa, le corresponden las siguientes temperaturas:

Una aproximación muy exagerada de la suma de Riemann, para la integral ya establecida, es la siguiente

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^6 T(x_i, y_i) \Delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^6 T_{i_{prom}} \Delta \vec{r}_i = T_{1_{prom}} \Delta \vec{r}_1 + T_{2_{prom}} \Delta \vec{r}_2 + \dots + T_{6_{prom}} \Delta \vec{r}_6 \\ &= \left(\frac{T_2 + T_1}{2} \right) \Delta \vec{r}_1 + \left(\frac{T_3 + T_2}{2} \right) \Delta \vec{r}_2 + \dots + \left(\frac{T_6 + T_5}{2} \right) \Delta \vec{r}_6 \\ \sum_{i=1}^6 T(x_i, y_i) \Delta \vec{r}_i &= (2.855) [-0.5, -1.875] + (1.625) [-1, -1.5] + (0.296) [-1.2, 2.16] \\ &\quad + (-1.197) [-0.6, 2.7] + (-8.493) [-0.2, 1.14]\end{aligned}$$

Después de efectuar operaciones, se tiene

$$\sum_{i=1}^6 T(x_i, y_i) \Delta \vec{r}_i = [-.9909, -20.065] [m^\circ C]$$

El resultado anterior se puede realizar de manera más sistemática (algorítmica) a partir de la construcción de las siguientes tablas

$P(x, y) [m]$	$T(x, y) = x^2 + xy^2 [^\circ C]$
$P_1(1.5, 0.375)$	$T_1 = T(1.5, 0.375) = 2.461$
$P_2(1, -1.5)$	$T_2 = T(1, -1.5) = 3.25$
$P_3(0, -3)$	$T_3 = T(0, -3) = 0$
$P_4(-1.2, -0.840)$	$T_4 = T(-1.2, -0.840) = 0.59328$
$P_5(-1.8, 1.86) =$	$T_5 = T(-1.8, 1.86) = -2.9873$
$P_6(-2, 3) =$	$T_6 = T(-2, 3) = -14.0$

$T_{i_{prom}} = \frac{(T_{i+1} + T_i)}{2}$	$\Delta \vec{r}_i = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j}$	$T_{i_{prom}} \Delta \vec{r}_i$	
$T_{1_{prom}} = 2.855$	$\Delta \vec{r}_1 = [-0.5, -1.875]$	$[-1.427, -5.353]$	
$T_{2_{prom}} = 1.625$	$\Delta \vec{r}_2 = [-1, -1.5]$	$[-1.625, -2.437]$	
$T_{3_{prom}} = 0.296$	$\Delta \vec{r}_3 = [-1.2, 2.16]$	$[-0.355, 0.639]$	
$T_{4_{prom}} = -1.197$	$\Delta \vec{r}_4 = [-0.6, 2.7]$	$[0.718, -3.231]$	
$T_{5_{prom}} = -8.493$	$\Delta \vec{r}_5 = [-0.2, 1.14]$	$[1.698, -9.682]$	
		$\sum T_{i_{prom}} \Delta \vec{r}_i =$	$[-.9909, -20.065]$

Como se verá en el próximo boletín, el valor correcto al realizar la integral es

$$\int_{P_1}^{P_6} T(x, y) d\vec{r} = [-0.797, -20.27]$$

Continuará