



Las integrales curvilíneas Parte 2

Autor: Hugo Germán Serrano Miranda
Nombramiento: Profesor de carrera de la DCB

En el artículo anterior, se hizo una descripción somera del concepto de integral vectorial, se propuso una clasificación de la diversidad de este tipo de integrales y, a partir de este esquema, se puso de relieve la importancia del estudio de las integrales de línea en las aplicaciones del campo de la ingeniería.

Cabe recordar que quedó pendiente la solución de dos problemas; el primero, relacionado con la interpretación de las propiedades de un tipo de integral curvilínea asociado a un campo vectorial de fuerzas; y el segundo problema relacionado con la solución de una integral curvilínea de un campo escalar de temperaturas.

En este artículo se resolverá el primer problema, se continuará con la solución del segundo y se planteará y resolverá un nuevo problema relacionado con este tópico.

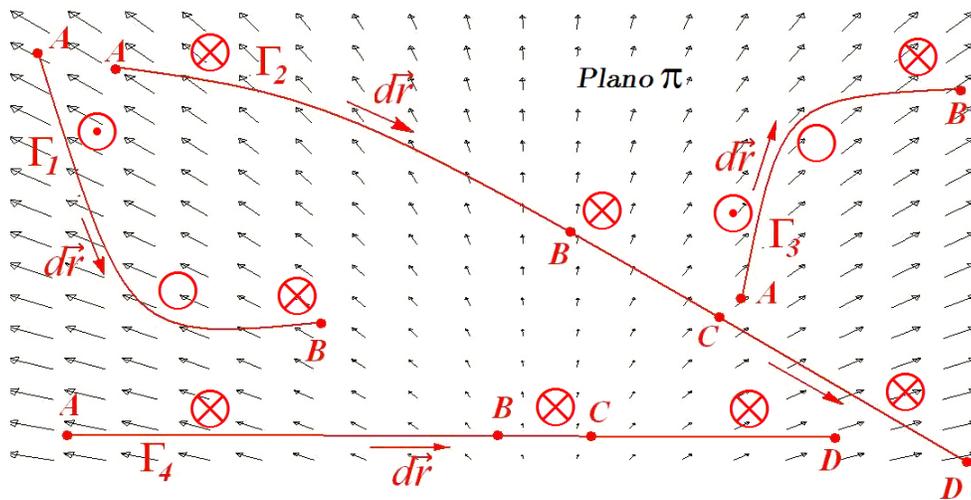
1 Solución del ejercicio asociado a la figura 2...

Correspondiente a la interpretación de una integral vectorial a lo largo cuatro trayectorias arbitrarias, es decir, describir cualitativamente la propiedades vectoriales locales del producto vectorial a partir de la expresión

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \times d\vec{r} = \lim_{|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \vec{F}_i \times \Delta\vec{r}_i = \lim_{|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} \left(\vec{F}_1 \times \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \times \Delta\vec{r}_2 + \dots + \vec{F}_n \times \Delta\vec{r}_n \right)$$

Con relación a la figura 2 (repetida), si el campo vectorial de fuerzas \vec{F} y las cuatro trayectorias mostradas se asume que están localizadas en el plano π , al efectuar la operación vectorial $\vec{F} \times d\vec{r}$

se tiene como resultado un vector perpendicular a este plano.



Campo de fuerzas \vec{F} y vectores $d\vec{r}$ en un plano para cuatro trayectorias

Figura 2 (repetida)

Al definir el vector unitario \hat{e}_N , en la dirección normal y saliente de este plano; la dirección y sentido del resultado del producto $\vec{F} \times d\vec{r}$ dependerá de las características que tengan \vec{F} y $d\vec{r}$ en un determinado punto de la trayectoria. Con el objeto de facilitar esta cualidad del producto cruz, se establecerá la siguiente nomenclatura: El símbolo \otimes indica que el vector \hat{e}_N penetra en el plano; el símbolo \circ señala que el producto cruz es nulo, ya sea porque alguno o ambos vectores sean nulos, o bien porque ambos son colineales; y por último \odot , indica que el vector \hat{e}_N sale del plano. La interpretación de la integral del producto cruz es la siguiente:

a) A lo largo de la trayectoria Γ_1

$\int_A^B \vec{F} \times d\vec{r}$: Cantidad vectorial con orientación \odot , luego \circ en la parte del codo y \otimes , después de pasar este punto hasta llegar a B .

b) A lo largo de la trayectoria Γ_2

$\int_A^D \vec{F} \times d\vec{r}$: Cantidad vectorial con orientación \otimes durante todo el recorrido desde A hasta D .

c) A lo largo de la trayectoria Γ_3

$\int_A^B \vec{F} \times d\vec{r}$: Cantidad vectorial con características similares a la trayectoria Γ_1 del inciso a)

d) A lo largo de la trayectoria Γ_4

$\int_A^D \vec{F} \times d\vec{r}$: Cantidad vectorial con características similares a la trayectoria Γ_2 del inciso b)

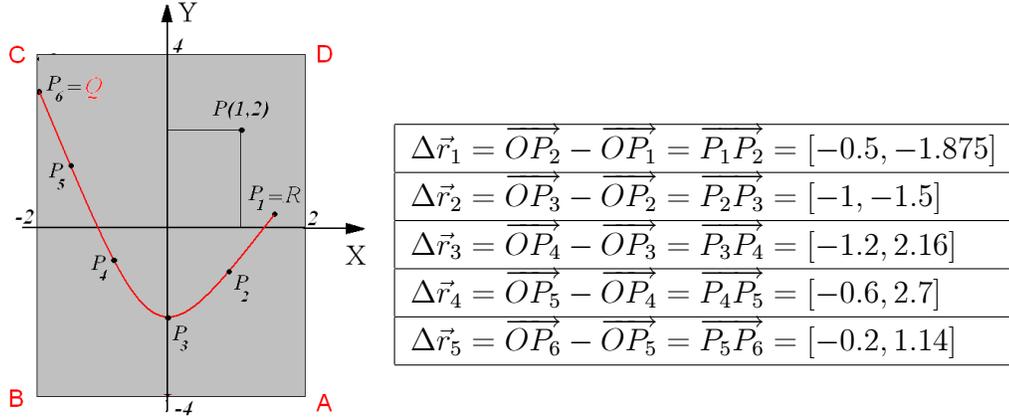
2 Solución del ejercicio del campo de temperaturas (continuación).

En el boletín anterior, se obtuvo el resultado de la integral de línea

$$\int_{P_1}^{P_6} T(x, y) d\vec{r} = [-0.797, -20.27] [^\circ C \cdot m]$$

Mediante una aproximación del empleo de la suma de Riemman. Esta suma como resultado de aproximar la trayectoria parabólica $y = \frac{3}{2}x^2 - 3$, sobre la que se realiza la integral, en

una *trayectoria quebrada* por cinco segmentos dirigidos, dados por los vectores desplazamientos definidos de la siguiente forma:



Figuras 6-b

Gráfica de la trayectoria $y = \frac{3}{2}x^2 - 3$ y de los seis puntos en la placa ABCD

Posteriormente se determinó la temperatura promedio en cada un de los segmentos, considerando las temperaturas en los extremos de cada segmento, es decir, para cada pareja de puntos se evaluó la temperatura mediante la función escalar $T(x, y) = x^2 + xy^2$ y se obtuvo su promedio. Por último, se realizó el siguiente desarrollo matemático que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 T(x_i, y_i) \Delta\vec{r}_i &= \sum_{i=1}^5 T_{i_{prom}} \Delta\vec{r}_i = T_{1_{prom}} \Delta\vec{r}_1 + T_{2_{prom}} \Delta\vec{r}_2 + \dots + T_{6_{prom}} \Delta\vec{r}_5 \\ &= \left(\frac{T_2 + T_1}{2} \right) \Delta\vec{r}_1 + \left(\frac{T_3 + T_2}{2} \right) \Delta\vec{r}_2 + \dots + \left(\frac{T_6 + T_5}{2} \right) \Delta\vec{r}_5 \\ \sum_{i=1}^5 T(x_i, y_i) \Delta\vec{r}_i &= (2.855) [-0.5, -1.875] + (1.625) [-1, -1.5] + (0.296) [-1.2, 2.16] \\ &\quad + (-1.197) [-0.6, 2.7] + (-8.493) [-0.2, 1.14] \end{aligned}$$

Después de efectuar las operaciones se llegó al resultado

$$\sum_{i=1}^5 T(x_i, y_i) \Delta\vec{r}_i = [-0.797, -20.27] \text{ [}^\circ\text{C} \cdot \text{m]}$$

A continuación, se desarrollará la integral de línea para el mismo problema del artículo anterior, pero ahora mediante el desarrollo directo de la integral $\int_R^Q T(x, y) d\vec{r}$ a lo largo de la trayectoria parabólica $y = \frac{3}{2}x^2 - 3$, con $T(x, y) = x^2 + xy^2$ [$^\circ\text{C}$]. Un procedimiento con vías a lograr este cometido es el siguiente:

Primeramente obtener el campo de temperaturas a lo largo de la trayectoria parabólica, esto se logra al sustituir la ecuación de la parábola en la ecuación que determina el campo escalar de la

temperatura,

$$T(x, y) = x^2 + xy^2 = x^2 + x \left(\frac{3}{2}x^2 - 3 \right)^2 = \frac{9}{4}x^5 - 9x^3 + x^2 + 9x \text{ [}^\circ\text{C]} \quad (1)$$

Como puede observarse el resultado queda expresado en función de una sola variable.

A continuación, se define el vector desplazamiento

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

Al obtener la diferencial de la ecuación de la trayectoria parabólica se tiene

$$dy = 3x dx$$

Y al sustituir este resultado en el vector desplazamiento

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + 3x dx\vec{j} = (1\vec{i} + 3x\vec{j}) dx \quad (2)$$

Por último, al sustituir (1) y (2) en la integral, se tiene

$$\int_R^Q T(x, y) d\vec{r} = \int_R^Q \left(\frac{9}{4}x^5 - 9x^3 + x^2 + 9x \right) (1\vec{i} + 3x\vec{j}) dx$$

Al desarrollar el integrando

$$\int_R^Q T(x, y) d\vec{r} = \vec{i} \int_R^Q \left(\frac{9}{4}x^5 - 9x^3 + x^2 + 9x \right) dx + \vec{j} \int_R^Q \left(\frac{27}{4}x^6 - 27x^4 + 3x^3 + 27x^2 \right) dx$$

Dado que en el punto R se tiene una abscisa $x = 1.5$ y en el punto Q de $x = -2$, al efectuar las integrales entre estos límites se tiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \int_R^Q T(x, y) d\vec{r} &= \vec{i} \int_{1.5}^{-2} \left(\frac{9}{4}x^5 - 9x^3 + x^2 + 9x \right) dx + \vec{j} \int_{1.5}^{-2} \left(\frac{27}{4}x^6 - 27x^4 + 3x^3 + 27x^2 \right) dx \\ &= -0.797\vec{i} - 20.270\vec{j} \text{ [}^\circ\text{C} \cdot \text{m]} \end{aligned}$$

Con el objeto de comparar los resultados aproximados con los obtenidos que arroja el proceso de integración, se efectuará el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} \int_R^Q T(x, y) d\vec{r} &= \int_R^{P_2} T(x, y) d\vec{r} + \int_{P_2}^{P_3} T(x, y) d\vec{r} + \int_{P_3}^{P_4} T(x, y) d\vec{r} + \int_{P_4}^{P_5} T(x, y) d\vec{r} + \int_{P_5}^Q T(x, y) d\vec{r} \\ &= \int_{1.5}^1 T(x, y) d\vec{r} + \int_1^0 T(x, y) d\vec{r} + \int_0^{-1.2} T(x, y) d\vec{r} + \int_{-1.2}^{-1.8} T(x, y) d\vec{r} + \int_{-1.8}^{-2} T(x, y) d\vec{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_R^Q T(x, y) d\vec{r} &= (-1.172\vec{i} - 4.327\vec{j}) + (-2.958\vec{i} - 5.314\vec{j}) + (2.358\vec{i} - 4.015\vec{j}) \\ &\quad + (-0.587\vec{i} + 2.401\vec{j}) + (1.562\vec{i} - 9.014\vec{j}) \end{aligned}$$

$$\int_R^Q T(x, y) d\vec{r} = -0.797i - 20.270j \text{ [}^\circ\text{C} \cdot \text{m]}$$

La siguiente tabla muestra los resultados por intervalos

| Intervalo | Operación $T_{i_{prom}} \Delta \vec{r}_i$ | Valor aproximado | Valor exacto $\int_R^Q T(x, y) d\vec{r}$ |
|--------------|-------------------------------------------|--------------------|------------------------------------------|
| $[R, P_2]$ | $(2.855) [-0.5, -1.875] =$ | $-1.427i - 5.353j$ | $-1.172i - 4.327j$ |
| $[P_2, P_3]$ | $(1.625) [-1, -1.5] =$ | $-1.625i - 2.437j$ | $-2.958i - 5.314j$ |
| $[P_3, P_4]$ | $(0.296) [-1.2, 2.16] =$ | $-0.355i + 0.639j$ | $2.358i - 4.015j$ |
| $[P_4, P_5]$ | $(-1.197) [-0.6, 2.7] =$ | $0.718i - 3.231j$ | $-0.587i + 2.401j$ |
| $[P_5, Q]$ | $(-8.493) [-0.2, 1.14] =$ | $1.698i - 9.682j$ | $1.562i - 9.014j$ |

| | | |
|------|-----------------------------------------------|-------------------------------|
| Suma | $\sum_{i=1}^5 T(x_i, y_i) \Delta \vec{r}_i =$ | $\int_R^Q T(x, y) d\vec{r} =$ |
| | $-0.990i - 20.065j$ | $-0.797i - 20.270j$ |

3 Ejemplo de la integral con producto cruz

La integral curvilínea del tipo $\int_M^N \vec{A} \times d\vec{r}$, tiene aplicaciones muy importantes en el ámbito de la mecánica clásica, una de ellas relacionada con una de las leyes de Kepler, la cual se deriva de la conservación de la cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas, otra aplicación es la correspondiente a la cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido, que en su forma elemental se expresa de la siguiente forma

$$\vec{M} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v})$$

Los términos \vec{M} y $m\vec{v}$ corresponden al momento de la fuerza y la cantidad de movimiento lineal de una partícula, respectivamente. En esta ecuación, después de separar variables, integrar y aplicar la diferencial al producto cruz, aparece dos veces este concepto de integral curvilínea, como puede verse en el siguiente desarrollo

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \int d(\vec{r} \times m\vec{v}) = \int (d\vec{r} \times m\vec{v} + m\vec{r} \times d\vec{v}) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \times m\vec{v} + \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m\vec{r} \times d\vec{v}$$

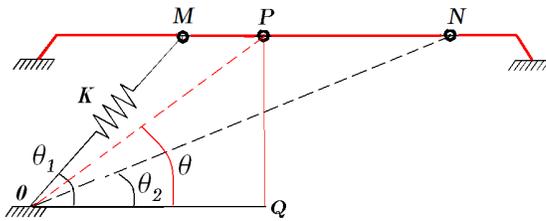
Como podrá *observarse*, la primera integral es cero ¿por qué?

Con el fin de ejemplificar la obtención, desarrollo e interpretación de este tipo de integrales, se resolverá el siguiente ejemplo de dinámica.

Descripción y enunciado del problema

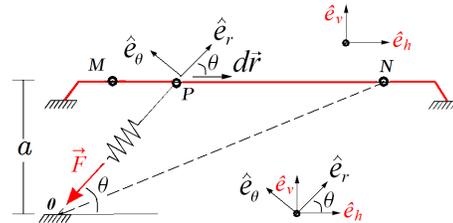
En la figura 1 que se muestra un anillo deslizante unido a una barra rígida horizontal, a su vez este anillo se encuentra unido a un resorte lineal de longitud L cuyo comportamiento fuerza-alargamiento δ lo determina la ley de Hooke. Si la barra que guía al anillo unido al resorte se

encuentran en un plano vertical, obtenga la integral $\int_M^N \vec{F} \times d\vec{r}$, donde \vec{F} corresponde a la fuerza del resorte y el vector $d\vec{r}$ determina el desplazamiento diferencial del anillo, al moverse a lo largo del segmento \overrightarrow{MN} , desde la posición M a la posición N ¹. Considere además que $L < a$, por lo que el resorte se encontrará alargado, tanto en la posición M con δ_1 , como en la posición P con δ_2 .



Movimiento de un anillo a lo largo de una barra guía

Figura 1



Orientación de la fuerza del resorte y vectores unitarios asociados

Figura 2

Dado que únicamente se debe obtener la integral curvilínea asociada a la fuerza del resorte, en la figura 2 se indica las orientaciones de los vectores fuerza \vec{F} y desplazamiento $d\vec{r}$; las características de estos vectores son las siguientes:

a) Conforme el punto M se mueve hacia la derecha, el vector fuerza aumenta de magnitud, ya que cada vez se estira más el resorte. Su orientación está determinada por el segmento \overrightarrow{MO} , y a pesar de que siempre está dirigida hacia el punto fijo O , esta se hace cada vez más horizontal conforme el punto M se mueve hacia la derecha; es decir la componente vertical (dirigida hacia abajo) se hace más pequeña, en cambio la horizontal (dirigida hacia la izquierda) se hace más grande tendiendo a ser horizontal. En resumen la orientación de esta fuerza es variable tanto en magnitud como en orientación.

b) El punto M tiene un movimiento rectilíneo hacia la derecha, independiente de que tan rápido o lento se lleve a cabo este proceso, por consiguiente su orientación es constante, en este sentido el vector desplazamiento hereda esta cualidad y su orientación además de constante se realiza en la dirección horizontal.

Para determinar la integral $\int_M^N \vec{F} \times d\vec{r}$ a lo largo del segmento \overrightarrow{MN} se requiere orientar a ambos vectores respecto a un determinado marco de referencia, por lo que se elegirán dos marcos de referencia: uno fijo con ejes horizontal y vertical siempre de orientación constante, cuya naturaleza la comparte el vector $d\vec{r}$ y con la base de vectores unitarios (\vec{e}_h, \vec{e}_v) . El otro marco de referencia es móvil, de orientación oblicua y *natural*² a la dirección en la que se presenta al

¹Es de suponerse que el anillo se desliza debido a una **fuerza externa** que no se muestra en la figura, ya que el interés del problema radica en conocer la integral curvilínea debido a la acción de la fuerza del resorte,

²El vector unitario \vec{e}_r siempre estará determinando en todo momento la dirección del vector fuerza \vec{F} . De allí

vector fuerza \vec{F} , este marco de referencia tendrá asociados a los vectores unitarios base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ de orientación variable.

El vector de posición del anillo, para cualquier posición P , está determinado por la siguiente ecuación vectorial

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = (L + \delta) \hat{e}_r$$

La diferencial de esta cantidad vectorial, proporciona el *vector desplazamiento diferencial*

$$d\vec{r} = d[(L + \delta) \hat{e}_r] = (d\delta) \hat{e}_r + (L + \delta) d\hat{e}_r \quad (3)$$

Como puede observarse, este vector $d\vec{r}$ contiene al vector unitario \hat{e}_r correspondiente a la base móvil de vectores unitarios $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta\}$, y también a su diferencial $d\hat{e}_r$ por lo que es conveniente cambiar esta base por la fija de vectores $\{\hat{e}_h, \hat{e}_v\}$. Este proceso es necesario con el objeto de disminuir la cantidad de variables que dependen de la posición del anillo y poder expresar el integrando de la integral vectorial en términos de una sola variable, como se verá a continuación. De la parte inferior de la figura 2, pueden obtenerse las siguientes relaciones

$$\hat{e}_r = |\hat{e}_r| (\hat{e}_h \cos \theta + \hat{e}_v \sin \theta) = \hat{e}_h \cos \theta + \hat{e}_v \sin \theta$$

$$\hat{e}_\theta = |\hat{e}_\theta| (-\hat{e}_h \sin \theta + \hat{e}_v \cos \theta) = -\hat{e}_h \sin \theta + \hat{e}_v \cos \theta$$

Conviene recordar que la magnitud $|\hat{e}_r| = 1$, por ser un vector unitario, de manera similar $|\hat{e}_\theta| = 1$, al expresar estas ecuaciones en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_h \\ \hat{e}_v \end{bmatrix}$$

Al obtener la derivada con respecto al tiempo en la expresión anterior

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d\theta}{dt} \sin \theta & \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \\ -\frac{d\theta}{dt} \cos \theta & -\frac{d\theta}{dt} \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_h \\ \hat{e}_v \end{bmatrix} = -\frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_h \\ \hat{e}_v \end{bmatrix}$$

En la ecuación anterior, se tiene que

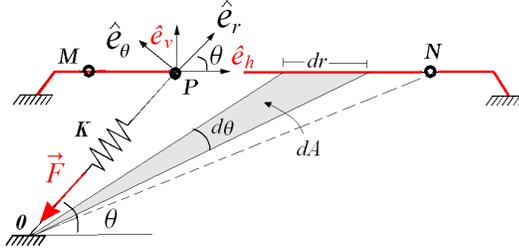
$$\begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_h \\ \hat{e}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \end{bmatrix}$$

Es decir

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \end{bmatrix} = -\frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} -\hat{e}_\theta \\ \hat{e}_r \end{bmatrix} = \frac{d\theta}{dt} \begin{bmatrix} \hat{e}_\theta \\ -\hat{e}_r \end{bmatrix}$$

el nombre de *natural*.

La ecuación anterior expresa, como era de esperarse, que las variaciones de esta pareja de vectores \hat{e}_r y \hat{e}_θ depende de la variación que tiene la variable angular θ , tal como lo ilustra la siguiente figura



Al eliminar la variable dt

$$\begin{bmatrix} d\hat{e}_r \\ d\hat{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{e}_\theta \\ -\hat{e}_r \end{bmatrix} d\theta \quad (4)$$

Al sustituir el primer renglón de la matriz (4) en (3) se tiene

$$d\vec{r} = d(L + \delta) \hat{e}_r = (d\delta) \hat{e}_r + (L + \delta) d\hat{e}_r = (d\delta) \hat{e}_r + (L + \delta) \hat{e}_\theta d\theta$$

Al efectuar el producto cruz

$$\vec{F} \times d\vec{r} = (-K\delta d\hat{e}_r) \times [(d\delta) \hat{e}_r + (L + \delta) \hat{e}_\theta d\theta] = -K\delta(L + \delta) d\theta \hat{e}_N \quad (5)$$

En la expresión anterior, al efectuar los productos vectoriales se tiene los siguientes resultados

$$\hat{e}_r \times \hat{e}_r = 0 \quad \text{y} \quad \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_N$$

Donde \hat{e}_N determina la dirección perpendicular al plano que contiene al resorte y la barra guía, es decir el plano que determinan los vectores unitarios \hat{e}_r y \hat{e}_θ .

El escalar

$$r = |\vec{r}| = L + \delta$$

Corresponde a una función que depende de la longitud del resorte L y de su deformación δ , al sustituir esta expresión en la ecuación anterior (5), se tiene el siguiente resultado

$$\vec{F} \times d\vec{r} = -K\delta r d\theta \hat{e}_N \quad (6)$$

Puede observarse que el integrando aún queda expresado en función de tres variables: δ , r y θ ; sin embargo el ángulo θ se puede expresar en términos de la deformación del resorte, con relación a la figura 1, se tiene que , el ángulo θ que forma la hipotenusa \overline{OM} con el cateto adyacente \overline{OP} correspondientes al triángulo rectángulo \widehat{OPM} ; puede obtenerse a partir de la siguiente relación trigonométrica

$$\theta = \arcsin\left(\frac{a}{L + \delta}\right)$$

Mediante el empleo de la fórmula de derivación

$$d(\arcsin(u)) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Se puede obtener la diferencial

$$d\theta = -\frac{ad\delta}{(L+\delta)^2 \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{(L+\delta)^2}\right)}}$$

Al sustituir en (6)

$$\vec{F} \times d\vec{r} = rK\delta \left[\frac{ad\delta}{(L+\delta)^2 \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{(L+\delta)^2}\right)}} \right] \hat{e}_N$$

No hay que olvidar que la magnitud de \vec{r} es

$$r = |\vec{r}| = L + \delta$$

Al sustituir esta expresión

$$\vec{F} \times d\vec{r} = (L + \delta) K\delta \left[\frac{ad\delta}{(L + \delta)^2 \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{(L+\delta)^2}\right)}} \right] \hat{e}_N$$

Y después de simplificar

$$\vec{F} \times d\vec{r} = K\delta \left[\frac{ad\delta}{(L + \delta) \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{(L+\delta)^2}\right)}} \right] \hat{e}_N = \left[\frac{Ka\delta d\delta}{\sqrt{((L + \delta)^2 - a^2)}} \right] \hat{e}_N$$

¡Por fin!, el integrando queda en función de una sola variable, este resultado indica que lo que hay que hacer es, ni más ni menos, que el siguiente proceso de integración

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \times d\vec{r} = Ka \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left(\frac{\delta \hat{e}_N}{\sqrt{(L + \delta)^2 - a^2}} \right) d\delta$$

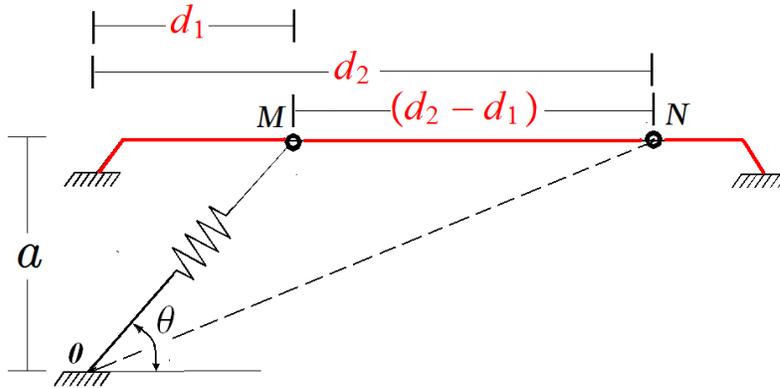
En donde las magnitudes de K , a y L son constantes

Al aplicar la fórmula de integración

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(b+x)^2 - a^2}} = \sqrt{-a^2 + b^2 + 2bx + x^2} - b \ln \left(2b + 2x + 2\sqrt{-a^2 + b^2 + 2bx + x^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
Ka \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\delta d\delta}{\sqrt{(L+\delta)^2 - a^2}} &= \left[Ka\sqrt{((L+\delta)^2 - a^2)} - KaL \ln \left(L + \delta + \sqrt{((L+\delta)^2 - a^2)} \right) \right]_{\delta_1}^{\delta_2} \\
&= Ka\sqrt{((L+\delta_2)^2 - a^2)} - KaL \ln \left(L + \delta_2 + \sqrt{((L+\delta_2)^2 - a^2)} \right) \\
&\quad + KaL \ln \left(L + \delta_1 + \sqrt{((L+\delta_1)^2 - a^2)} \right) - Ka\sqrt{((L+\delta_1)^2 - a^2)} \\
&= Ka \left(\sqrt{(L+\delta_2)^2 - a^2} - \sqrt{(L+\delta_1)^2 - a^2} \right) - KaL \ln \frac{\left(L + \delta_2 + \sqrt{(L+\delta_2)^2 - a^2} \right)}{\left(L + \delta_1 + \sqrt{(L+\delta_1)^2 - a^2} \right)}
\end{aligned}$$

Luego, esta última expresión se puede simplificar si se hace intervenir las siguientes relaciones geométricas

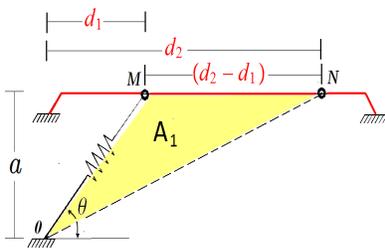


Relaciones geométricas

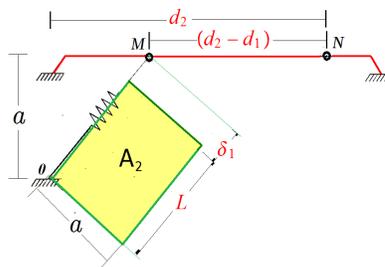
$$\begin{aligned}
r_1 &= \left| \overrightarrow{OM} \right| = L + \delta_1 \\
r_2 &= \left| \overrightarrow{ON} \right| = L + \delta_2 \\
d_1 &= \sqrt{(L + \delta_1)^2 - a^2} \\
d_2 &= \sqrt{(L + \delta_2)^2 - a^2}
\end{aligned}$$

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \left(\frac{Ka\delta}{\sqrt{(L+\delta)^2 - a^2}} \right) d\delta = Ka(d_2 - d_1) - (KaL) \ln \frac{\left(\left| \overrightarrow{ON} \right| + d_2 \right)}{\left(\left| \overrightarrow{OM} \right| + d_1 \right)}$$

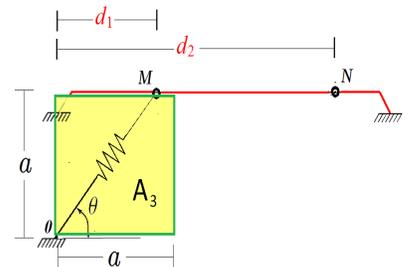
Interpretación:



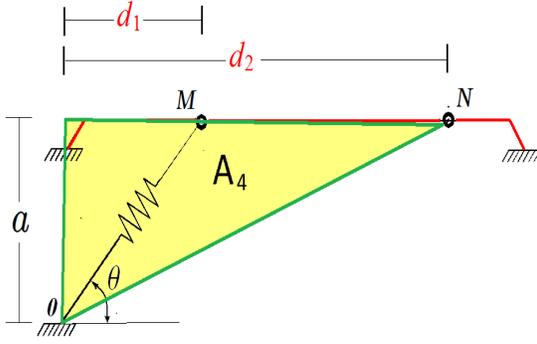
$$A_1 = \frac{1}{2}a(d_2 - d_1)$$



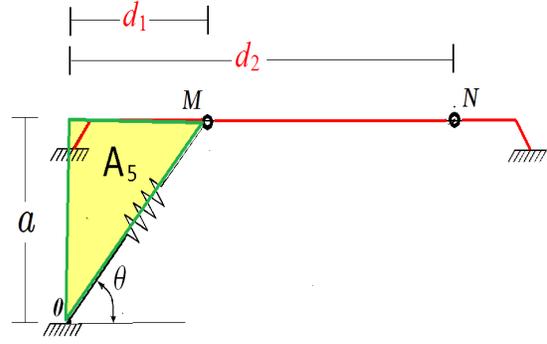
$$A_2 = aL$$



$$A_3 = a^2$$



$$A_4 = \frac{1}{2}ad_2$$



$$A_5 = \frac{1}{2}ad_1$$

a) $\frac{1}{2}a(d_2 - d_1)$ corresponde

$$\left| \vec{F} \times d\vec{r} \right| = Ka(d_2 - d_1) + KaL \ln \frac{\left(\left| \overrightarrow{ON} \right| + d_2 \right)}{\left(\left| \overrightarrow{OM} \right| + d_1 \right)}$$

Donde

$$A_1 = \frac{1}{2}a(d_2 - d_1) = \text{área del triángulo de altura } a \text{ y base } (d_2 - d_1)$$

Por lo que el término

$$Ka(d_2 - d_1) = 2KA_1$$

$A_2 = aL =$ área del rectángulo de altura a y base L que es la longitud del resorte

Por lo que el término

$$KaL = KA_2$$

Ahora bien el argumento de la función logarítmica se puede expresar

$$\frac{\left| \overrightarrow{ON} \right| + d_2}{\left| \overrightarrow{OM} \right| + d_1} = \frac{\left(\left| \overrightarrow{ON} \right| + d_2 \right) a}{\left(\left| \overrightarrow{OM} \right| + d_1 \right) a} = \frac{\left(\sqrt{a^2 + d_2^2} + d_2 \right) a}{\left(\sqrt{a^2 + d_1^2} + d_1 \right) a} = \frac{\left(\sqrt{(a^2)^2 + (ad_2)^2} + ad_2 \right)}{\left(\sqrt{(a^2)^2 + (ad_1)^2} + ad_1 \right)}$$

En donde

$$A_3 = a^2 \text{ área del cuadrado de lado } a$$

$$A_4 = \frac{1}{2}ad_2 \text{ área del triángulo de base } a \text{ y altura } d_2$$

$$A_5 = \frac{1}{2}ad_1 \text{ área del triángulo de base } a \text{ y altura } d_1$$

Por lo que la ecuación quedaría

$$\int_M^N \left| \vec{F} \times d\vec{r} \right| = 2KA_1 - KA_2 \ln \frac{\left(\sqrt{A_3^2 + 4A_4^2} + 2A_4 \right)}{\left(\sqrt{A_3^2 + 4A_5^2} + 2A_5 \right)}$$

O bien en su forma vectorial

$$\int_A^B \vec{F} \times d\vec{r} = K \left[2A_1 - A_2 \ln \frac{(\sqrt{A_3^2 + 4A_4^2} + 2A_4)}{(\sqrt{A_3^2 + 4A_5^2} + 2A_5)} \right] \hat{k}$$

Luego todo se reduce a que la magnitud de la integral $\int_A^B \vec{F} \times d\vec{r}$, es una combinación matemática de operaciones cuyos argumentos son simplemente interpretaciones de áreas geométricas que aparecen en la configuración dinámica del mecanismo y operaciones que se realizan entre ellas y proporción entre algunas de ellas, que se relacionan con la geometría del mecanismo y las deformaciones del resorte, multiplicada por la constante de éste. La dirección de la integral vectorial es perpendicular al plano donde se localiza el mecanismo.

El siguiente desarrollo corresponde a un ejemplo numérico, suponga que el sistema mecánico tiene los siguientes parámetros

$$K = 20 \left[\frac{N}{m} \right], L = 0.4 [m], \delta_1 = 0.2 [m], \delta_2 = 0.6 [m], a = 0.5 [m]$$

El desarrollo del resultado escalar de la integral, es el siguiente

$$\begin{aligned} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left(\frac{Ka\delta}{\sqrt{(L+\delta)^2 - a^2}} \right) d\delta &= Ka \left(\sqrt{(L+\delta_2)^2 - a^2} - \sqrt{(L+\delta_1)^2 - a^2} \right) \\ &\quad - KaL \ln \frac{\left(L + \delta_2 + \sqrt{(L+\delta_2)^2 - a^2} \right)}{\left(L + \delta_1 + \sqrt{(L+\delta_1)^2 - a^2} \right)} \\ \int_{\delta_1}^{\delta_2} \left(\frac{Ka\delta}{\sqrt{(L+\delta)^2 - a^2}} \right) d\delta &= 20 \times 0.5 \times \left(\sqrt{(0.4+0.6)^2 - 0.5^2} - \sqrt{(0.4+0.2)^2 - 0.5^2} \right) \\ &\quad - 20 \times 0.5 \times 0.4 \times \ln \frac{\left(0.4 + 0.6 + \sqrt{(0.4+0.6)^2 - 0.5^2} \right)}{\left(0.4 + 0.2 + \sqrt{(0.4+0.2)^2 - 0.5^2} \right)} \\ &= 5.343 - 2.778 = 2.565 [N \cdot m] \end{aligned}$$

Al evaluar la otra alternativa de la solución se tiene:

Al evaluar las distancias d_1 y d_2

$$d_1 = \sqrt{(L+\delta_1)^2 - a^2} = 0.331 [m] \quad \text{y} \quad d_2 = \sqrt{(L+\delta_2)^2 - a^2} = 0.866 [m]$$

Y la magnitudes de los vectores de posición

$$|\vec{r}_1| = L + \delta_1 = 0.6 [m] \quad \text{y} \quad |\vec{r}_2| = L + \delta_2 = 1.0 [m]$$

Se tiene el siguiente cálculo de las áreas

$$A_1 = \frac{1}{2}a(d_2 - d_1) = 0.134 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$A_2 = aL = 0.2 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$A_3 = a^2 = 0.25 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$A_4 = \frac{1}{2}ad_2 = 0.215 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$A_5 = \frac{1}{2}ad_1 = 0.082 \text{ [m}^2\text{]}$$

Al evaluar el resultado se tiene

$$\int_A^B \vec{F} \times d\vec{r} = K \left[2A_1 - A_2 \ln \frac{(\sqrt{A_3^2 + A_4^2} + A_4)}{(\sqrt{A_3^2 + A_5^2} + A_5)} \right] \hat{k}$$

$$\int_A^B \vec{F} \times d\vec{r} = 20 \times \left(2 \times 0.134 - 0.2 \times \ln \frac{\sqrt{0.25^2 + 4 \times 0.215^2} + 2 \times 0.215}{\sqrt{0.25^2 + 4 \times 0.082^2} + 2 \times 0.082} \right) \hat{k} = 2.590 \hat{k} \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

Resultado que, ante la imposibilidad de librarse de los errores de redondeo en los cálculos, puede considerarse prácticamente el mismo.

CINEMÁTICA RELATIVISTA

Edgar Raymundo López Téllez. Profesor de asignatura “B”

edgar_lopez_t@live.com.mx

Salvador Enrique Villalobos Pérez. Profesor de carrera titular “A” T. C.

villasalen@hotmail.com

En el presente trabajo se emplean los conceptos básicos de la Cinemática para encontrar, con ayuda de las llamadas Transformaciones de Lorentz, las expresiones correspondientes para las componentes de la Velocidad y la Aceleración relativistas.

Las citadas transformaciones, propuestas inicialmente por H. Lorentz (1853-1928) con relación al problema del campo electromagnético de una carga en movimiento, fueron empleadas por A. Einstein (1879-1955) con el fin de establecer el siguiente principio fundamental:

“La velocidad de la luz es un invariante físico, y tiene el mismo valor para todos los observadores en movimiento relativo uniforme.”

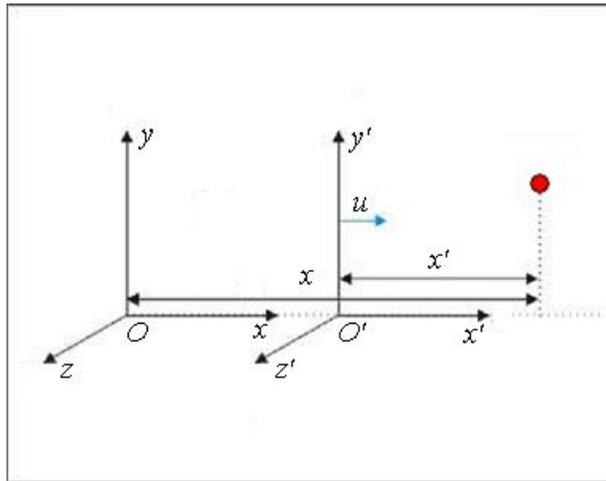


Figura 1

En el caso de un par de marcos de referencia inerciales, uno de los cuales se mueve con velocidad constante u a lo largo del eje x y cuyos orígenes de coordenadas denotaremos con las letras O y O' respectivamente (ver Figura 1), tales transformaciones pueden escribirse en la forma:

$$x = \gamma(x' + ut') \quad y = y' \quad z = z' \quad t = \gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right)$$

Escritas en términos del parámetro γ que es una medida de la rapidez relativa del marco de referencia O' con respecto de O y que a menudo se escribe como:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Debe verificarse en este punto de si la velocidad del marco de referencia O' , denotada por u , con respecto de O es suficientemente pequeña comparada con el valor de la velocidad de la luz en el vacío, denotada por c , las transformaciones anteriores se reducen adecuadamente a las conocidas

Transformaciones de Galileo, ya que en este caso γ se aproxima a la unidad puesto que el cociente u/c se aproxima a cero.

La estrategia ahora consiste en encontrar la llamada Transformación de Velocidades, bajo las transformaciones anteriores, con la finalidad de escribir la expresión correspondiente para la aceleración.

Para ello se procede a encontrar las diferenciales de las transformaciones citadas, es decir:

$$dx' = \gamma(dx - udt) \quad dy' = dy \quad dz' = dz \quad dt' = \gamma\left(dt - \frac{udx}{c^2}\right)$$

Donde debe notarse que se han escrito las transformaciones inversas; es decir, hemos cambiado las variables primadas por las no primadas e invertido el signo de u .

A partir de las expresiones anteriores es posible escribir:

$$V_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{V_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} V_x}$$

$$V_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} = \frac{V_y}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2} V_x\right)}$$

$$V_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} = \frac{V_z}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2} V_x\right)}$$

Las llamadas Transformaciones de Velocidades para las componentes cartesianas correspondientes; y donde es claro que si el movimiento se verifica solamente en la componente x las dos últimas expresiones son idénticamente iguales a cero.

Adicionalmente y con base en lo anterior se encuentra que:

$$V_x = \frac{V_x' + u}{1 + \frac{u}{c^2} V_x'}$$

En este punto es preciso aclarar, como podría comprobarlo el lector, que si $V_x' = c$ entonces $V_x = c$ y viceversa; es decir que las transformaciones encontradas cumplen satisfactoriamente con el postulado de la invariancia de la velocidad de la luz para cualquier observador citado al inicio de este texto.

Nótese que al igual que para las Transformaciones de Lorentz, se verifica que si u es mucho menor que c las Transformaciones de Velocidades encontradas se reducen a aquellas empleadas por la Mecánica de Newton.

Por último, y siguiendo el procedimiento empleado en párrafos anteriores, se procede a encontrar la diferencial de de la velocidad con la finalidad de hallar una expresión para la aceleración, es decir si:

$$dV_x' = \frac{(1 - \frac{u^2}{c^2})}{(1 - \frac{uV_x}{c^2})^2} dV_x \quad \text{y entonces:} \quad A_x' = \frac{dV_x'}{dt'} = \frac{(1 - \frac{u^2}{c^2})^{3/2}}{(1 - \frac{uV_x}{c^2})^3} A_x$$

La expresión correspondiente para la componente de la aceleración en la dirección x y bajo el supuesto de que el movimiento de cierta partícula sólo se verifica en esa dirección, es decir que la aceleración en y , y en z son nulas.

La expresión anterior indica entre otras cosas que la Aceleración Relativista, a diferencia de la de la Mecánica de Newton, no es una invariante para los marcos de referencia inerciales; es decir, cada observador O' y O mide aceleraciones distintas para una misma partícula en movimiento bajo la premisa de la validez del postulado de A. Einstein.

En un trabajo posterior analizaremos las consecuencias dinámicas de la validez de este postulado con la finalidad de escribir las expresiones correspondientes para la Fuerza, el Momento Lineal, el Trabajo y la Energía.

Bibliografía:

- SANCHEZ-MORENO, A.
Introducción a la Física Moderna, Vol. I y II
Facultad de Ingeniería, UNAM
México 2000
- SEARS, F.W., ZEMANSKY M.W., YOUNG, H.D., y FREEDMAN, R.A.
Física Universitaria, Vol. II
Undécima edición
Pearson (Addison-Wesley)
México 2004