UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

COORDINACIÓN

DE CIENCIAS APLICADAS

BOLETÍN

FEBRERO DE 2018

SEMESTRE 2018-2

Nueva época, No. 21

DE LA CUADRATURA DEL CÍRCULO
y algo más de geometría euclideana

ING. JUAN OCÁRIZ CASTELAZO

Uno de los muchos problemas que se plantearon y resolvieron los griegos, fue el de la cuadratura del círculo, es decir, el cálculo de su área. Ahora cualquier niño de primaria puede calcularla fácilmente, así como su perímetro. Pero el círculo presenta muchos más problemas que su área o su perímetro. Es posible que, con el paso de los años, el estudiante que llega a la Facultad haya olvidado algunos aspectos de la geometría del círculo y otros de la geometría euclidiana en general —ángulos, triángulos, etc.— y que resultan imprescindibles para abordar algunas de las asignaturas del currículum. En este artículo nos proponemos traer a la memoria los conceptos que conviene recordar con precisión para cursar las materias del área de Mecánica: Estática, Mecánica y Cinemática y Dinámica.

Antes de entrar en materia

Resulta de la máxima utilidad para el estudio de cualquier ciencia conocer con claridad el contenido de algunas palabras para ir avanzando sobre la certeza de los conocimientos que se adquieren, como son:

—*Axioma*. Es una proposición que se acepta como verdadera, sin demostración. Los axiomas también se llaman leyes. No se demuestran o porque son evidentes, o porque constituyen el principio de una ciencia, y no existen, por tanto, proposiciones anteriores a partir de las cuales se puedan demostrar. "La línea más corta entre dos puntos es la recta" es un axioma de la geometría, y es evidente. "El cambio del movimiento es directamente proporcional a la fuerza impresa, y ocurre en la misma dirección en que dicha fuerza se imprime", es la segunda ley de Newton, que no es evidente y es uno de los principios de la mecánica clásica.

Euclides llama postulados a sus cinco primeros axiomas.

—*Teorema.* Es una verdad que se obtiene a partir de una demostración. Por ejemplo, el teorema de Pitágoras se puede demostrar a partir de la semejanza de triángulos.

.

—*Hipótesis*. Del griego *hipo* = debajo, *tesis* = lo que está, equivale a suposición, del latín *sub* = bajo, *pósitus* = puesto. Las demostraciones proceden generalmente de suposiciones.

—*Corolario*. Es una consecuencia inmediata de un teorema.

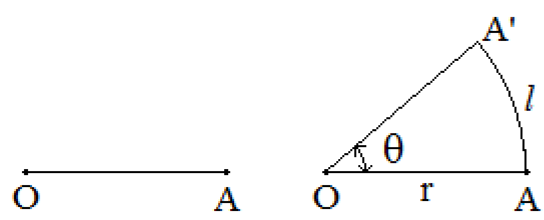
—*Definición.* Señala de manera breve y completa la esencia de un objeto. Debe contener el género próximo y la diferencia específica. La definición de circunferencia es "línea cuyos puntos equidistan de otro, llamado centro".

Ideas redondas

Partiremos del hecho de que son conocidos (1) el valor del número π (letra griega llamada pi), que es la razón de la circunferencia al diámetro, (es decir, el cociente entre aquella y este) y que un diámetro equivale a dos radios; de modo que la longitud de la circunferencia es igual a $2\pi r$. Y (2) que el área de un círculo es igual a πr^2, es decir *pi* por el radio del círculo elevado al cuadrado.

Un radián vs todos los grados

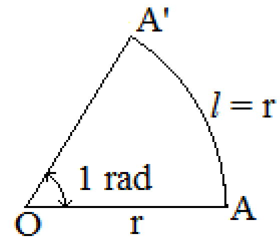
Consideremos un segmento de recta *OA* que haremos girar en torno a *O*. El extremo *A* describirá un arco de circunferencia de longitud *l*, cuyo radio es $r = OA$. La diferencia entre las dos direcciones del radio es un ángulo, θ. El ángulo se mide dividiendo la longitud del arco entre el radio: $\theta = l/r$.



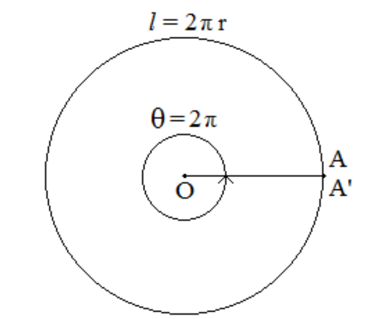
Dado que la medida del ángulo es una longitud entre otra, propiamente se trata de una adimensional. Pero…

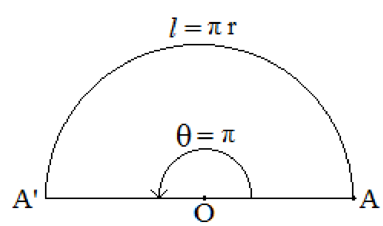
Si el arco descrito por el punto *A* tiene una longitud igual al radio, entonces $\theta = 1/1 = 1$. A este ángulo se le llama *radián* y se considera la unidad angular.

.



Ahora bien, si hacemos girar al radio una vuelta completa, el punto *A* describirá una circunferencia cuya longitud es $2\pi r$. Por tanto, el ángulo correspondiente a las dos direcciones del radio es $\theta = 2\pi r/r = 2\pi$. Si el radio gira media vuelta, el arco tendrá una longitud igual a πr, y el ángulo será $\theta = \pi r/r = \pi$. Y si gira una cuarto de vuelta, $\theta = \pi/2$, etc.

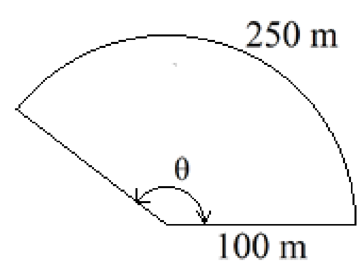




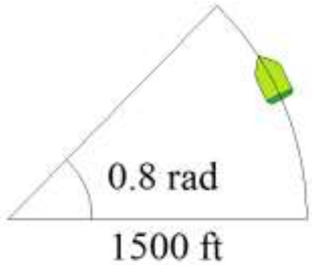
Un poco de gimnasia

Se invita al lector a realizar los siguientes ejercicios, cuyas respuestas podrá hallar al final de este artículo.

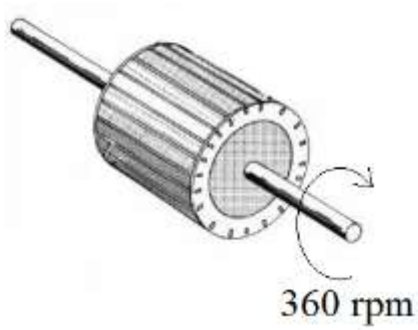
1. La longitud de un arco de una pista circular es de 250 m. Sabiendo que el radio de la pista mide 100 m, ¿cuántos radianes tiene el ángulo que subtiende el arco?



2. Un buque que navega describiendo una trayectoria circular de 1500 pies de radio se desvía un ángulo de 0.8 radianes. ¿Qué longitud navega mientras se desvía?



3. Un rotor gira con una velocidad angular de 360 revoluciones por minuto. ¿Cuál es su velocidad en radianes por segundo?



Sexo… no, sexagesimal

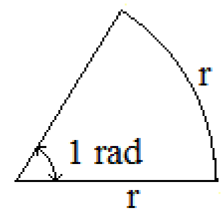
La palabra sexagesimal se refiere al modo de contar de sesenta en sesenta. Pues a Hiparco de Rodas, en el siglo II a. C se le ocurrió dividir el ángulo 2π en trescientas sesenta partes iguales, llamadas grados. Y cada grado, disminuirlo en sesenta partes, que reciben el nombre de minutos (del latín *minútum* = disminuido); y disminuir por segunda vez el grado en otras sesenta partes, que son los segundos (del latín *secúndus* = segundo). Esta forma de medir los ángulos ha sido sumamente útil y práctica. Solo en los últimos años, con la aparición de las calculadoras y para efectos de cálculos, se han dejado de utilizar los minutos y los segundos, y se emplean las décimas de grado. En general, expresar los grados sexagesimales con una decimal, es suficientemente preciso para fines prácticos.

El afán de dividir todo en múltiplos de diez, nacido de la Revolución francesa con el Sistema métrico decimal, llevó a la invención unos grados centesimales: se dividió el ángulo recto en cien partes iguales. El lector observará que su calculadora electrónica científica puede operar de tres *modos*: “deg”, “gra” o “rad”; el primero (*degrees*) corresponde a los grados sexagesimales, el segundo (*grades*), a los centesimales, y el tercero, a los radianes.

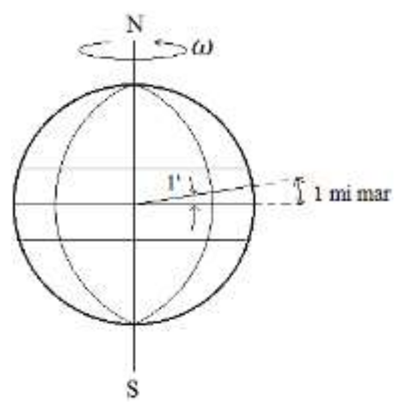
Es fácil ver que para convertir un radián a grados sexagesimales (en el resto de este artículo omitiremos este adjetivo), basta multiplicar por 180 y dividir entre π, puesto que el ángulo de π radianes equivale a 180°.

Más gimnasia

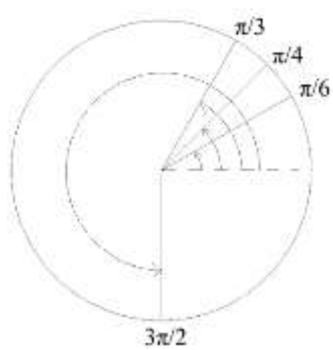
4. ¿A cuántos grados sexagesimales equivale un radián?



5. Una milla marítima corresponde al arco de meridiano terrestre subtendido en un minuto sexagesimal. Si la longitud de un meridiano es de 40000 km, ¿cuántos metros mide una milla marítima?



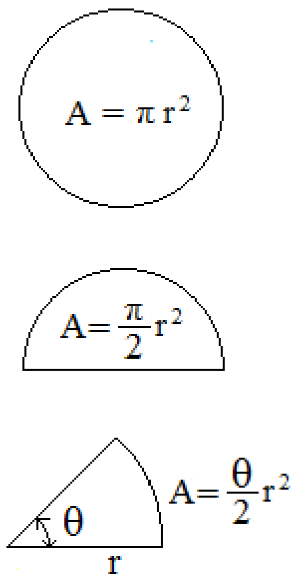
6, Diga a cuántos grados equivalen: π/6 rad; π/4 rad, π/3 rad y 3π/2 rad.



.

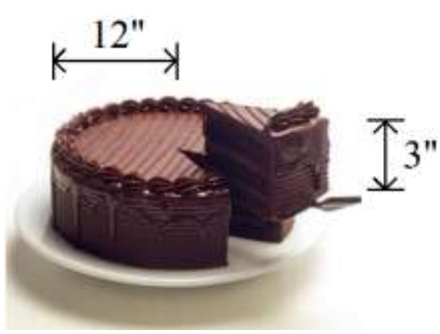
Rebanadas de pastel

Hemos aceptado que el área del círculo, es decir, su cuadratura, es igual a πr^2. Por tanto, la del semicírculo es la mitad $(\pi/2)r^2$, pues dicha superficie es proporcional al ángulo que lo subtiende. Observemos que π y π/2 son la mitad del ángulo correspondiente al sector circular considerado. Podemos deducir, por medio de una simple regla de tres, que el área de un sector circular es igual al semiángulo (lógicamente, en radianes) multiplicado por el radio del círculo al cuadrado: $A = (\theta/2)r^2$. Claro que hay otras formas de llegar a este resultado: pero ¿habrá otra más clara y sencilla que ésta?

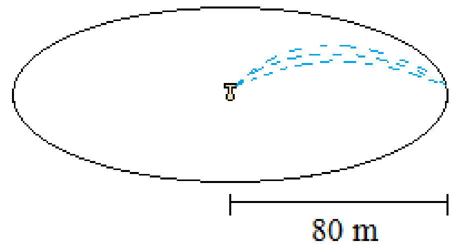


Ahora, calestenia

7. Un niño corta una rebanada del pastel de su cumpleaños. El pastel tiene 12 pulgadas de radio y 3, de espesor. Si corta un ángulo de 30°, ¿qué volumen se lleva?



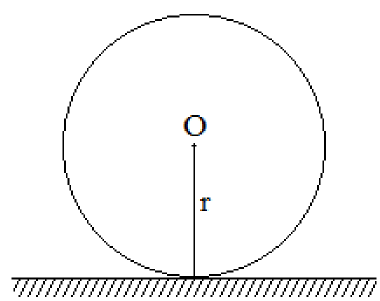
8. Un aspersor riega en círculos de 80 m de radio un campo de alfalfa. A un comprador de pastura le corresponde un área de 5000 m^2. ¿Qué ángulo, en grados, debe abarcar su siega?



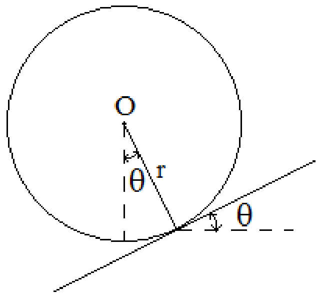
9. Se organizará una fiesta en un amplio terreno y se calcula que la superficie que han de requerir es de 900 ft^2. Si se desea cubrir esa superficie con una lona circular, ¿qué radio debe tener?

Rampante, secante, tangente

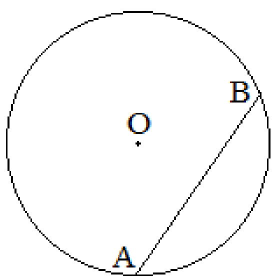
Coloquemos una llanta sobre una superficie horizontal.



Si suponemos que la llanta es perfectamente rígida y, por tanto, indeformable, el contacto entre ella y el suelo se da en un punto. Desde una perspectiva geométrica, se trata de una recta que toca la circunferencia. A cualquier recta que cumpla esta condición se le llama *tangente* (del latín *tángere* = tocar). Además de que el contacto es un solo punto, debe observarse que el radio que llega a dicho punto es normal, es decir, forma un ángulo recto con la tangente.



Hay otras rectas relacionadas con la circunferencia, que conviene identificar. La recta que corta la circunferencia en dos puntos, como se muestra en la figura, ¿qué nombre deberá llevar? Pues no debe llevar otro que el de *secante*, del latín *secáre* = cortar o segar. El segmento *AB* se llama "cuerda".



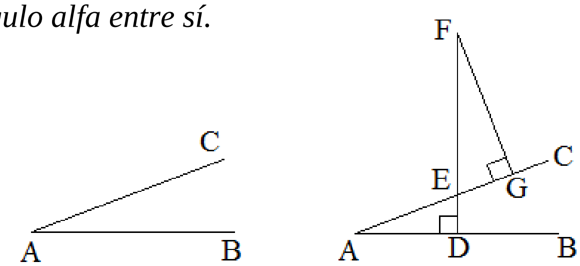
La cuerda que pasa por el centro es un diámetro.

Es claro que la distancia entre la tangente y el centro de la circunferencia es el radio mismo. Pero ¿cuál es la distancia entre una secante y el centro? ¿*OA*? ¿*OB*? Ninguna de ellas. La distancia entre una recta y un punto se mide levantando una perpendicular a la recta que pase por el punto, que es la distancia mínima entre ellos.

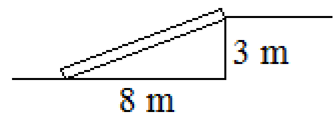
Vale la pena notar que el ángulo que forma la tangente con la horizontal es el mismo que forma el radio con la vertical. Esto se demuestra mediante el siguiente teorema: tracemos dos rectas cualesquiera *AB* y *AC* y levantemos una perpendicular a la primera en D; tal perpendicular, que corta a la segunda recta en *E*, la alargamos hasta el punto *F*, desde donde bajamos otra perpendicular a la recta *AC*; hemos construido dos triángulos rectángulos cuyos ángulos en *E* son opuestos por el vértice, consiguientemente iguales; por tanto, los ángulos *A* y *F* son iguales (QED).

.

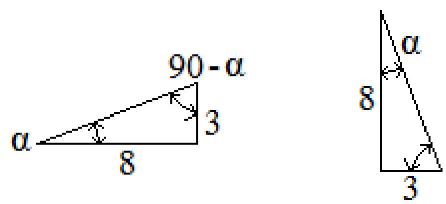
Este teorema se puede enunciar de la siguiente manera: *Si dos rectas forman entre sí un ángulo alfa, sus perpendiculares forman también un ángulo alfa entre sí.*



Pensemos en una rampa que sirve para llegar a un andén de 3 m de altura. Si el extremo de la rampa se coloca a 8 m del andén, su pendiente es 3/8.

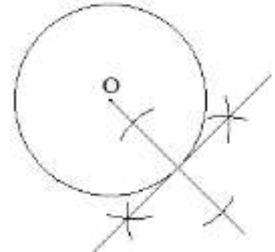


Tal razón corresponde a la tangente del ángulo que la rampa forma con la horizontal. Pero la tangente de su perpendicular es precisamente la tangente del ángulo complementario, que es de 8/3.

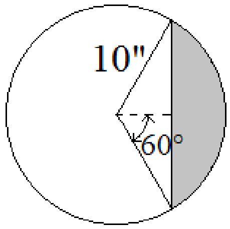


Más calestenia

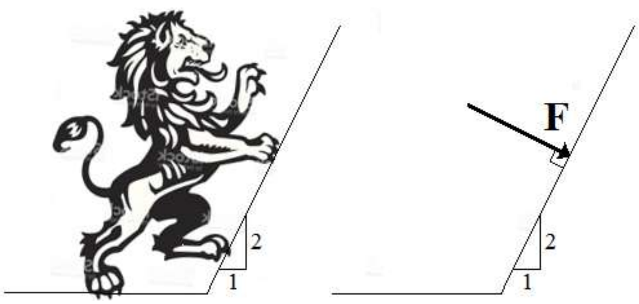
10. Tome un compás y una regla, que son los únicos instrumentos que utilizaban los griegos para su geometría. Trace una circunferencia de alrededor de 5 cm de radio y elija un punto cualquiera de ella. Dibuje ahora una recta tangente a la circunferencia en dicho punto, (Si intenta dibujarla al tanteo le será imposible. Debe trazar una recta larga que pase por el centro y el punto. Con centro en el punto ha de trazar arcos que corten a la recta, y, haciendo centro en esos cortes, nuevos arcos a ambos lados de la recta, cuyas intersecciones permiten trazar la tangente buscada.)



11. Calcule el área de la corona sombreada de la figura.

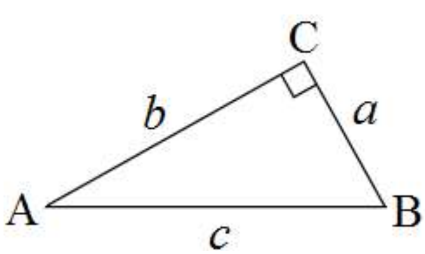


12. Un león rampante, cansado, se apoya en una superficie, cuya pendiente es 2. La pata ejerce una fuerza normal sobre la superficie. ¿Qué ángulo forma esa fuerza con respecto a la horizontal?



Un círculo bastante mágico

En cualquier triángulo rectángulo la razón de un cateto (del griego, *cateto* = perpendicular) a la hipotenusa (del griego *hipo* = debajo, *tenusa* = tendida) depende de los ángulos agudos del triángulo. Así, la razón del cateto opuesto al ángulo a la hipotenusa recibe el nombre de *seno* del ángulo; la razón del cateto adyacente (del latín *ad* = junto, *iacens* = echado) a la hipotenusa, de *coseno*, y la razón del cateto opuesto al adyacente, se llama *tangente* del ángulo. Resulta claro que el seno de un ángulo es igual al coseno de su complementario; de ahí su nombre.



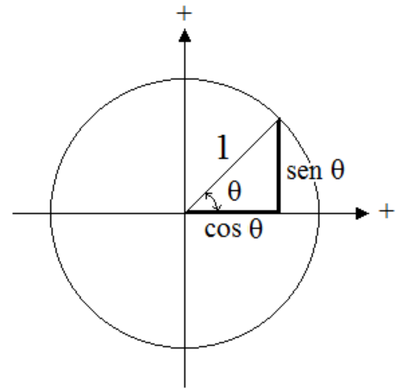
$$sen\ A = \frac{a}{c}; \cos A = \frac{b}{c}; tan\ A = \frac{a}{b}$$

$$sen\ B = cos\ A$$

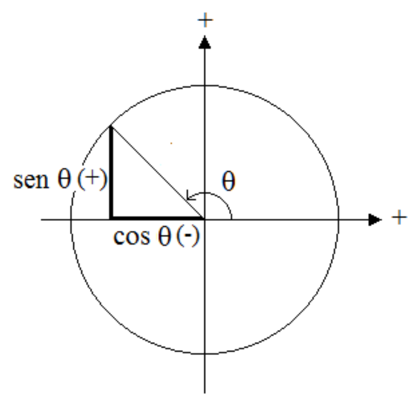
.

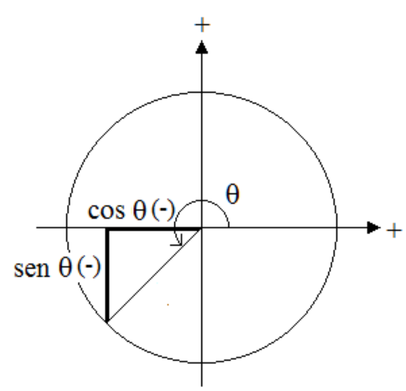
Ahora bien, si la longitud de la hipotenusa es 1, entonces *sen A* = *a*/1 = a y *cos A*= *b.*

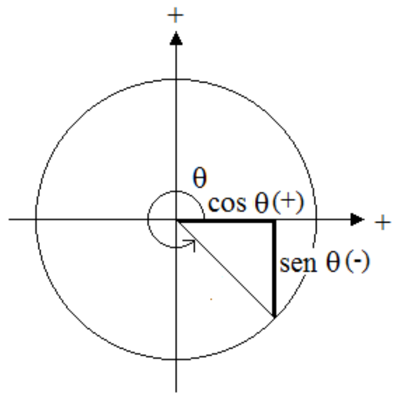
Tracemos, pues, un círculo de radio unitario, y dentro, construyamos un triángulo rectángulo. Lógicamente el cateto vertical tiene una longitud igual a la del seno del ángulo θ, y el horizontal, al coseno del mismo ángulo.



Cuando el valor del ángulo se halla entre 0 y 90°, tanto su seno como su coseno son positivos, Además, se puede observar que al aumentar el valor de θ —lector: imagina que el radio gira en sentido antihorario—, el seno crece, pero el coseno disminuye. No hace falta que expliquemos el comportamiento y los signos de estas funciones en los otros cuadrantes, pues su comprensión es muy intuitiva.





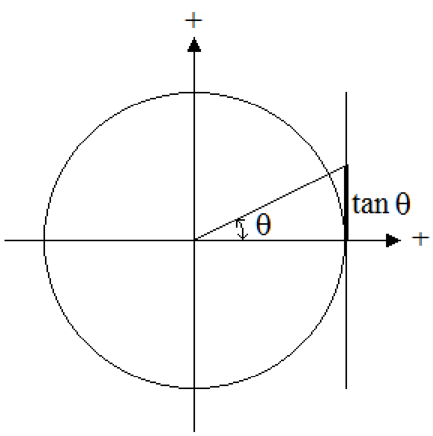


En el mismo círculo trazaremos una tangente, y prolongaremos el radio hasta alcanzarla. Ahora tenemos un triángulo rectángulo cuyo cateto horizontal, el adyacente al ángulo, tiene una longitud igual a 1. Y, por tanto, el cateto vertical es igual a la tangente de θ, ya que

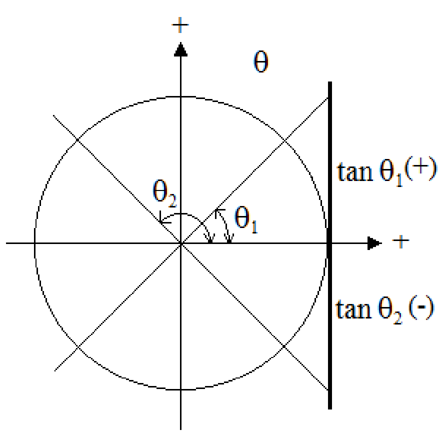
tan θ = cateto opuesto/ cateto adyacente

tan θ = cateto opuesto/1

tan θ = cateto opuesto.



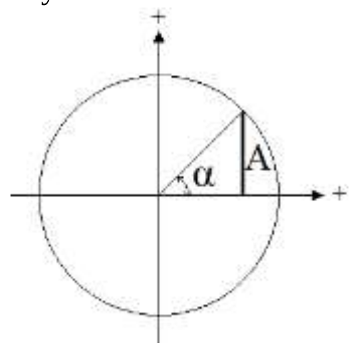
Cuando el ángulo es recto, la tangente alcanza un valor infinito. Pasados los 90° la tangente se vuelve negativa, y se sigue comportando según se ve en las figuras.



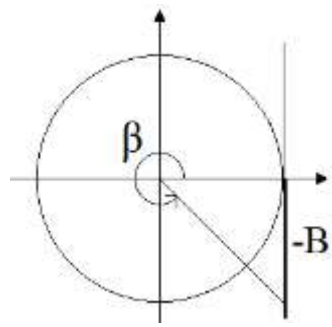
.

Un poco de ascesis

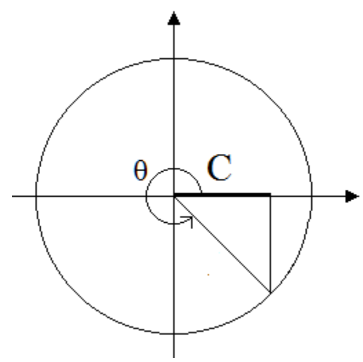
13. El seno del ángulo α es *A*, ¿cuál es el otro ángulo que cuyo seno tiene el mismo valor?



14. Si tan β = – *B*, ¿cuál es el otro ángulo cuya tangente es igual a – *B*?

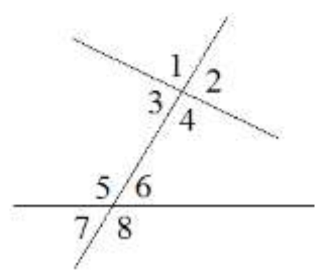


15. Si el coseno de θ es igual a *C*, ¿cuáles son los ángulos cuyo coseno es igual a – *C*?



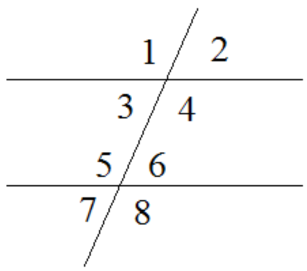
Más de ángulos

Dos rectas cortadas —segadas— por una tercera, llamada secante, forman ocho ángulos.

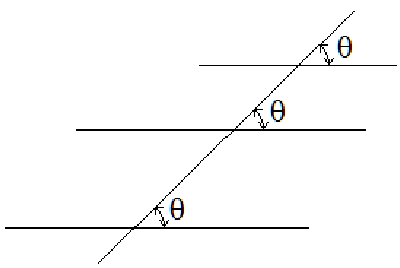


Los ángulos 1 y 4 son iguales, y se llaman opuestos por el vértice. Lo mismo ocurre con las parejas 2 y 3, 5 y 8, y 6 y 7.

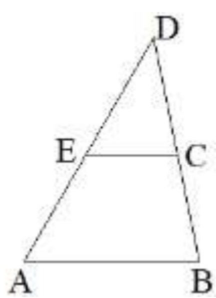
Cuando una secante corta dos rectas paralelas, cuatro de los ocho ángulos tienen un valor, y los otros cuatro, otro. Esos dos valores suman, además, 180°: se trata de ángulos *suplementarios*. Según su posición, reciben también otras denominaciones: 1 y 5 son *correspondientes*;1 y 8 son *alternos externos*; y 3 y 6 son *alternos internos*.



De las afirmaciones anteriores podemos deducir que si una recta forma con otro cierto ángulo, la primera formará el mismo ángulo con todas las paralelas de la segunda, como se aprecia en la figura siguiente.



De esto podemos deducir que los triángulos *ABD* y *ECD* son semejantes, pues comparten el mismo ángulo *D*, y los otros son *correspondientes*.



Al triángulo *ABD* le hemos trazado una recta *EC* paralela a la base *AB*. Y llamaremos triángulos semejantes a los que tengan ángulos internos iguales. Sus lados resultan proporcionales, es decir;

$$AD/ED=BD/CD=AB/EC$$

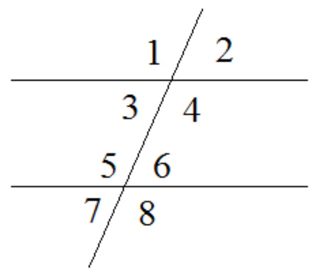
.

En realidad, esto que acabamos de afirmar no es otra cosa que una aplicación concreta del Teorema de Tales, el primer teorema de la historia, que establece que los segmentos correspondientes de dos rectas cortadas por paralelas, son proporcionales, Es decir:

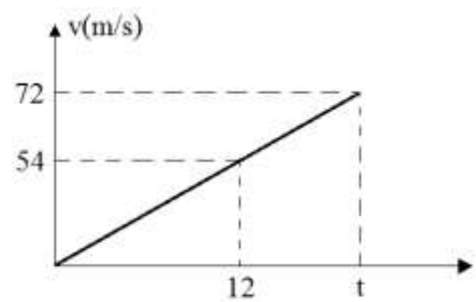
$$AE/BC = ED/CD$$

Más ascesis

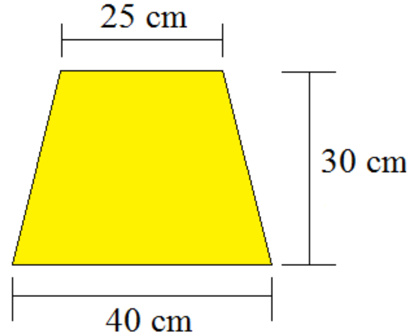
16. Según su posición relativa, ¿qué nombre debería darse a los ángulos 2 y 7?



17. La gráfica de la figura muestra la velocidad de una partícula en función del tiempo. Si cuando t = 12 segundos, v = 54 metros por segundo, ¿cuánto valdrá t cuando v alcance los 72 metros por segundo?



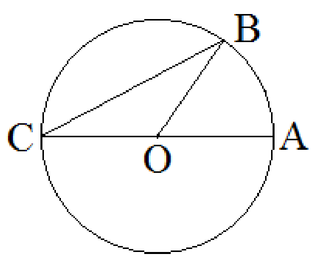
18. El cono de la figura se ha truncado de otro de altura h. Con las dimensiones mostradas, determine h.



Tiro al ángulo

Arriba recordamos cómo se miden los ángulos, y observamos las relaciones entre el ángulo central —el ángulo cuyo vértice se encuentra en el centro del círculo—, los arcos y los sectores circulares. Pero dentro del círculo se pueden trazar otros ángulos

Consideremos el caso de la figura. Aparecen dos ángulos, el *AOB* y el *ACB*, Si imaginamos que el radio *OB* gira en sentido antihorario, veríamos que ambos ángulos crecen; y cuando el primero mida 90°, el segundo medirá 45°, es decir, la mitad.



Nos deberíamos preguntar si siempre el ángulo *0* es el doble de *C*. Demostraremos que sí, remitiéndonos a la figura anterior. En dicha figura aparece un triángulo, el *OBC*, que es isósceles, pues los lados *OB* y *OC* son iguales al radio. Por tanto, los dos ángulos agudos, son iguales. Además, el obtuso del triángulo y el ángulo *AOB* suman 180°, lo mismo que deben sumar los tres ángulos interiores del triángulo. O sea que

$$AOB + BOC = 180° \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

y

$$2\,(OCB) + BOC = 180° \ldots\ldots..(2)$$

Si a la ecuación (2) le restamos la (1), queda

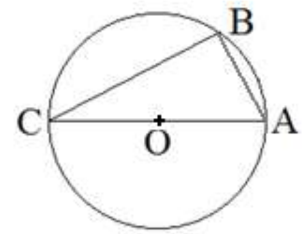
$$2(OCB) - AOB = 0$$

y despejando resulta que

$$\boxed{AOB = 2(OCB)} \qquad \text{QED}$$

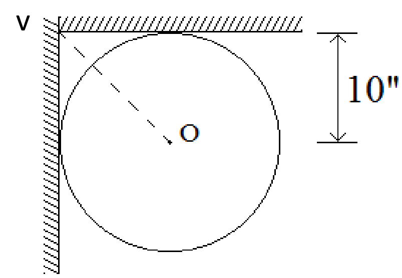
que es lo que había que demostrar (*quod erat demonstrándum*). Se trata de un teorema del que podemos extraer el siguiente corolario: *la suma de dos ángulos interiores de un triángulo es igual al exterior del vértice opuesto*.

El lector, además, podrá llegar fácilmente a demostrar que, independientemente de cuál sea el punto *B*, el triángulo *ABC* de la figura siguiente es rectángulo en *B*. Esta demostración, por cierto, se le atribuye a Tales de Mileto.



¿Y qué pasa cuando es un círculo el que inscribimos en un ángulo? Dos hechos evidentes hay que tener en cuenta: los lados del ángulo son tangentes al círculo, y su centro se halla en la bisectriz (del latín *bis* = dos veces, *sectrix* = la que corta) del ángulo. No olvidemos que, además, los radios correspondientes al punto de tangencia son perpendiculares (o normales) a las tangentes, en este caso, a los lados del ángulo.

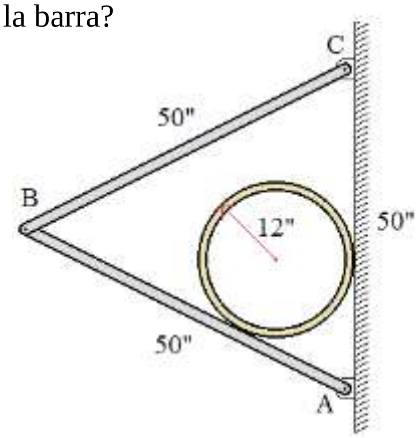
Si un balón de futbol de 10 pulgadas de diámetro pasa rozando el ángulo de la portería, ¿a qué distancia del vértice se encuentra su centro?



De la figura se deduce, a partir del teorema de Pitágoras, que *VO* al cuadrado es igual a dos veces el cuadrado de 10:

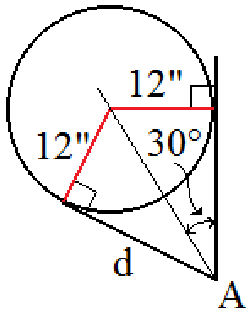
$$VO^2 = 2\,(10)^2;\ VO = 10\sqrt{2};\ \boxed{VO = 14.14 \text{ in}}$$

Un caso más complejo sería el siguiente: ¿a qué distancia de la articulación *A* del tubo de la figura toca la barra?



.

Por lo que dijimos arriba, podemos construir la siguiente figura:



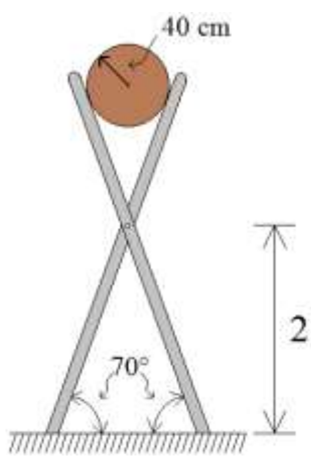
y de ella determinamos que la función trigonométrica del ángulo de 30° que relaciona el radio del tubo con la distancia *d* que buscamos, es la tangente:

tan 30° = 12/*d*; *d* = 12/*tan* 30° = 12 /3

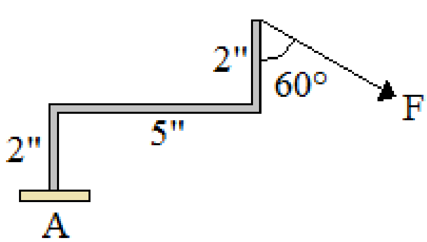
$\boxed{d = 20.8 \text{ in}}$

Miscelánea de ejercicios

19. Un barril de 40 cm de radio está colocado sobre un soporte de tijera, como se muestra en la figura. ¿A qué distancia del perno está el contacto del barril con el soporte?

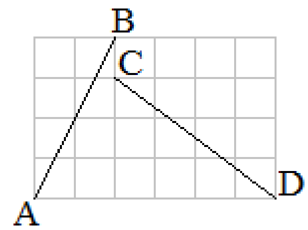


20. ¿Cuál es la distancia entre la línea de acción de la fuerza mostrada y el punto A:



.

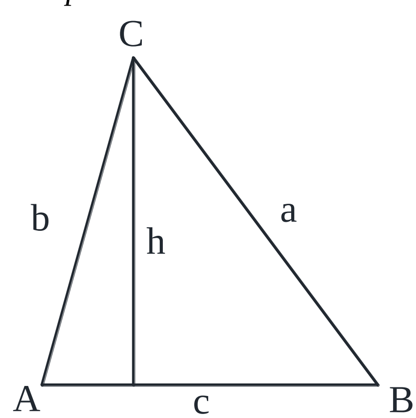
21. Diga cuáles son las pendientes de las rectas AB y CD.



Dos leyes que nos son leyes

Hay dos teoremas de la trigonometría que con el paso del tiempo hemos venido llamando leyes. Se trata del teorema de senos y del teorema de cosenos. Resultan muy necesarios para la resolución de triángulos oblicuángulos y, por tanto, para la descomposición de vectores.

La ***ley de senos*** establece que *en todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos*.



Simbólicamente podemos escribir:

$$\frac{a}{sen A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

La demostración es la siguiente. Sea un triángulo cualquiera (es decir, sin hipotenusa ni catetos) *ABC*, como se muestra en la figura. Trazamos una perpendicular a la base *c* que pase por el vértice *C*, que corresponde a la altura *h*. Tenemos ahora dos triángulos rectángulos y sus hipotenusas son *a* y *b*, mientras que *h* es el cateto opuesto a los ángulos *A* y *B*, Por tanto

sen A = h/b; h =b sen A
sen B = h/a; h = a sen B

Igualando tenemos

$b\ sen\ A = a\ sen\ b$

y ordenando obtenemos

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B}$$

A la igualdad que falta se llega eligiendo otra de las alturas del triángulo y siguiendo el mismo proceso.

La ***ley de los cosenos*** se puede enunciar de la siguiente manera: *en todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de esos mismos lados multiplicado por el coseno del ángulo que forman entre sí.* Simbólicamente, escogiendo el lado A de la figura anterior, podemos escribir

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Lo demostraremos de la siguiente manera. Sea un triángulo cualquiera ABC. Levantamos una perpendicular a la base c que pase por el vértice C, que viene a ser una altura h, como se muestra en la figura. Se forman dos triángulos rectángulos cuyas bases son m y n, de modo que $c = m + n$; o sea, $n = c - m$, y $\cos A = m/b$, o bien, $m = b \cos A$. Del teorema de Pitágoras, $m^2 + h^2 = b^2$ y $n^2 + h^2 = a^2$; restando miembro a miembro obtenemos $m^2 - n^2 = b^2 - a^2$. Sustituyendo n por su valor, podemos escribir $m^2 - (c - m)^2 = b^2 - a^2$. Desarrollando el binomio tenemos $m^2 - (c^2 - 2cm + m^2) = b^2 - a^2$. Simplificando queda $c^2 + 2cm = b^2 - a^2$. Ahora sustituimos m por su valor: $c^2 + 2cb \cos A = b^2 - a^2$. Por último, ordenamos de la siguiente manera:

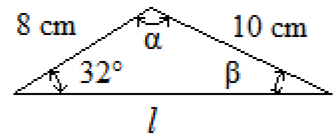
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Como es lógico, si se construye el triángulo sobre las otras bases, se llega a las siguientes expresiones:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

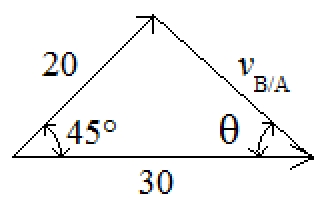
¿Seremos capaces de aplicar estas leyes?

22. Del triángulo de la figura se conocen dos lados y un ángulo, como se muestra. Determine los ángulos α y β y el lado *l*.



23. Un niño juega con tres palitos de madera: uno de 12, otro de 18 y otro de 21 pulgadas de largo. Con ellos construye un triángulo. ¿Cuáles son sus ángulos interiores?

24. Un buque A viaja hacia el este con una velocidad de 30 nudos mientras que otro, B, navega hacia el noreste a 20 nudos. Para determinar la velocidad relativa del buque B respecto al A, se construye el triángulo de la figura. Determine la magnitud del lado $v_{B/A}$ (de la velocidad buscada) y el ángulo θ.



Advertencia (que no hace falta leer)

El contenido de este artículo no pretende dar una explicación completa de ninguno de los temas tratados de la geometría euclidiana, ni mucho menos. Intenta solamente recordar a los estudiantes noveles de la Facultad algunos conceptos importantes, que fácilmente se olvidan durante los años de preparatoria.

Para ampliar los temas esbozdos aquí se pueden consultar los siguientes textos:

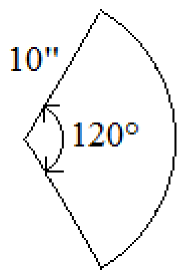
Elementos de Geometría, de G. M. Bruño, Biblioteca de la Vda. de Bouret

Trigonometría rectilínea, de Agustín Anfossi, editorial Progreso

Geometría plana y en el espacio, de Jorge Wentworth y David Eugenio Smith, editorial Porrúa.

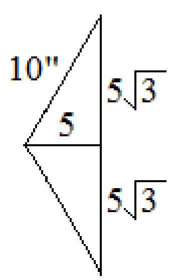
Respuestas a los ejercicios

1) 2.5 rad
2) 1200 ft
3) 37.7 rad/s
4) 57.3°
5) 1852 m
6) 30°, 45°, 60° y 270°
7) 113.1 in^3
8) 89.5°
9) 16.93 ft
11)



$$120° = 120°\left(\frac{\pi}{180°}\right) rad = \frac{2}{3}\pi rad$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi\right) 10^2 = 104.7$$



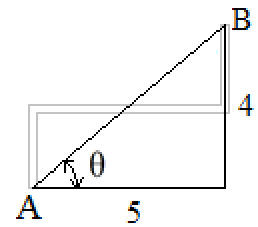
$$A_2 = \frac{1}{2}(10\sqrt{3})5 = 21.65$$

$$A = A_1 - A_2$$

$$\boxed{A = 83.1\, in^2}$$

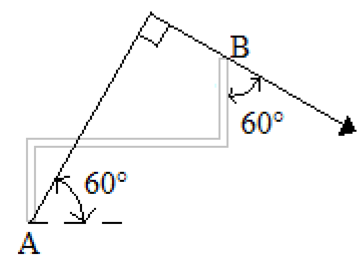
12) 26.6°
13) 180° - α
14) β – 180°
15) θ -180° y 540°- θ
16) Alternos externos
17) 16 s
18) 80 cm
19) 109.9 cm

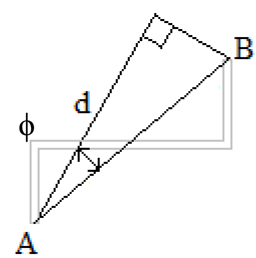
20)



$$\overline{AB} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

$$\tan\theta = \frac{4}{5} :\ \theta = 30.65$$





$$\emptyset = 60° - 30.65° = 29.35°$$

$$\cos\emptyset = \frac{d}{\overline{AB}}$$

$$d = \sqrt{41}(\cos 29.35°)$$

$$\boxed{d = 5.58\, in}$$

21) 2 y 0.75
22) α= 122.9°; β= 25.1°, l= 15.84 cm
23) 58.8°; 86.4°; 34.8°
24) 21.2 nudos

Las respuestas están redondeadas a la tercera cifra significativa o, si comienzan con 1, a la cuarta; los ángulos en grados sexagesimales, a la primera cifra decimal.

Editado por: Miguel Tadeo Vázquez Martínez