

MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS

CURVAS DE BÉZIER

Las curvas de Bézier fueron publicadas por el ingeniero francés Pierre Bézier en 1962. Es una de las curvas paramétricas más utilizadas en el diseño asistido por computadora (CAD) hoy en día.

Son una combinación lineal de los polinomios de Bernstein.

La curva de Bézier se obtiene a través del modelo matemático

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i B_i^n(t)$$

El modelo matemático de los polinomios de Bernstein es $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$, donde $t \in [0,1]$

Es una curva polinomial la cual se encarga de aproximar los "puntos control". El polinomio puede ser de grado n y aproxima n+1 puntos de control.

El orden de la curva es igual al número de puntos menos uno. Geométricamente, se puede decir, que si la curva tiene dos puntos se aproxima a una línea recta, si la curva contiene tres puntos se aproxima a una curva cuadrática y si tiene cuatro puntos será una aproximación a una curva cúbica.

Para dos puntos $P1(x_1, y_1)$, $P2(x_2, y_2)$, tendremos la ecuación vectorial:

$$(x, y) = (1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2)$$

Para tres puntos $P1(x_1, y_1)$, $P2(x_2, y_2)$ y $P3(x_3, y_3)$ se tendrá la siguiente ecuación vectorial:

$$(x, y) = (1 - t)^2(x_1, y_1) + 2(1 - t)t (x_2, y_2) + t^2 (x_3, y_3) \square$$

Para cuatro puntos de control P1(a,b), P2(c,d), P3(e,f) y P4(g,h), su ecuación vectorial es:

$$(x, y) = (1 - t)^3(a, b) + 3(1 - t)^2t (c, d) + 3(1 - t)t^2 (e, f) + t^3(g, h)$$

Sus ecuaciones paramétricas son:

$$x = a(1 - t)^3 + 3ct(1 - t)^2 + 3et^2(1 - t) + gt^3$$

$$y = b(1 - t)^3 + 3dt(1 - t)^2 + 3ft^2(1 - t) + ht^3$$

donde $t \in [0,1]$

Por ejemplo:

Sean los puntos A(1,-1), B(2,1), C(3,2) y D(4,-2), si los sustituimos en las ecuaciones paramétricas se tiene:

$$x = 1(1 - t)^3 + 3(2)t(1 - t)^2 + 3(3)t^2(1 - t) + (4)t^3$$

$$y = (-1)(1 - t)^3 + 3(1)t(1 - t)^2 + 3(2)t^2(1 - t) + (-2)t^3$$

Si ahora se sustituyen valores de $t \in [0,1]$

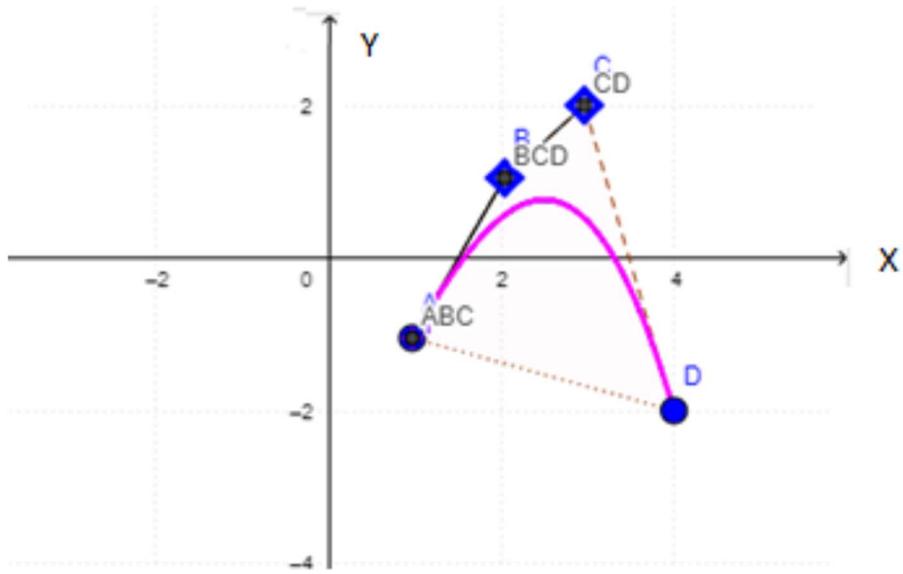
Si $t=0$ entonces al evaluar en las ecuaciones paramétricas se obtiene $(x,y) = (a,b) = (1,-1)$

Si $t=1$ entonces se obtiene $(x,y) = (g,h) = (4,-2)$

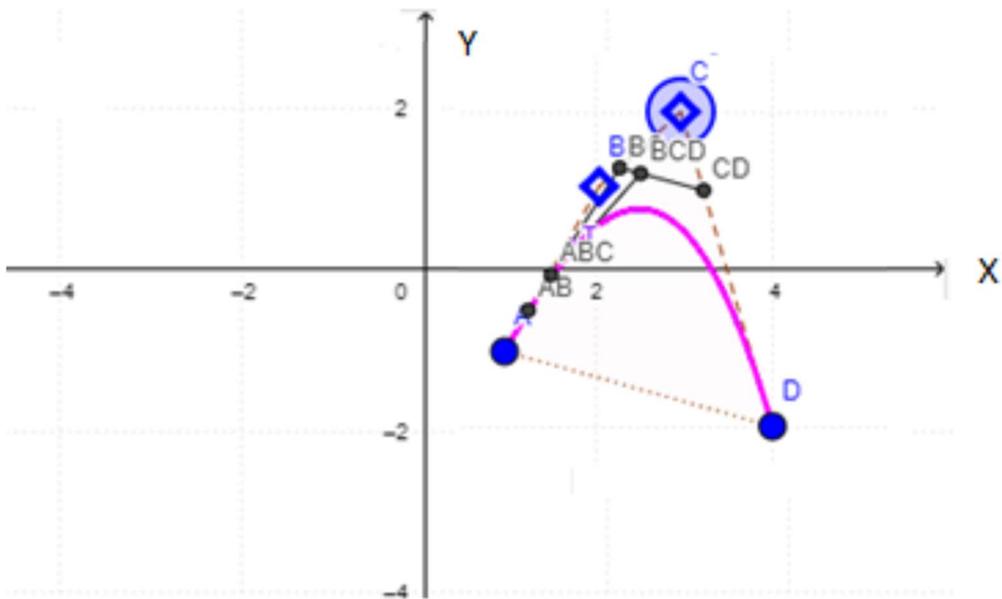
Si se va variando t , la curva se irá suavizando.

A continuación, se muestran una serie de figuras donde se varia t . Nótese que la curva inicia en A y terminará en D como se muestra en la figura:

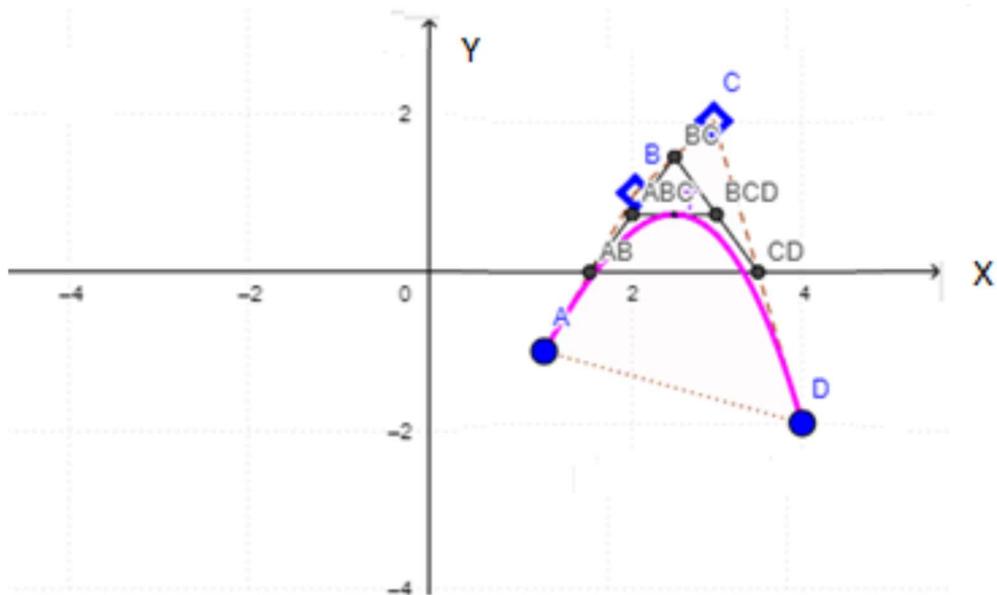
Si $t = 0$, se obtiene la aproximación:



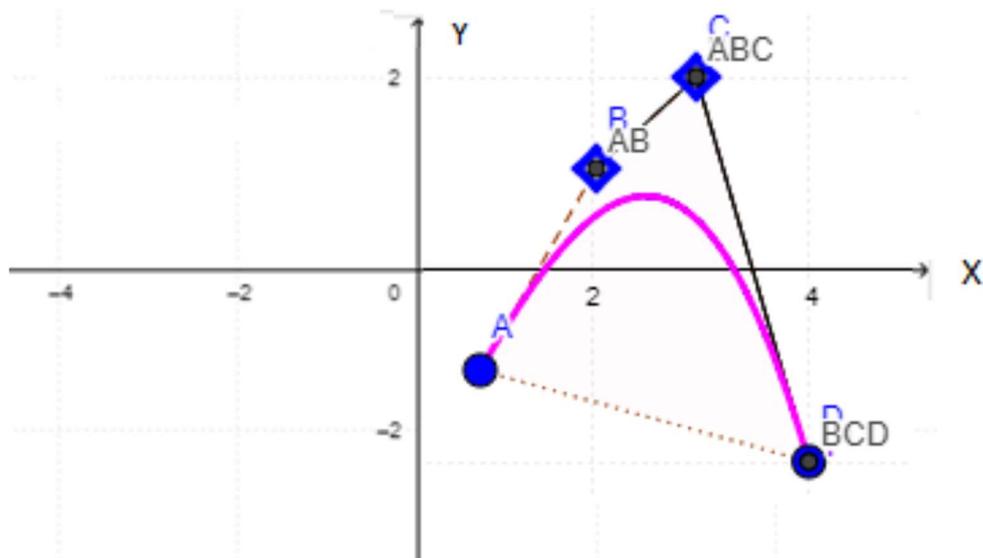
Si $t = 0.25$ se aproxima a la siguiente curva



Si $t = 0.5$ la curva se aproxima



Si $t = 1$



Se puede variar tantas veces a t e ir observando cómo se va trazando la gráfica de la aproximación de la curva.

Aplicaciones

Las curvas de Bézier nacieron como aplicación al diseño aeronáutico y automotriz, actualmente se utilizan para el modelado por computadora de curvas y superficies. Animación Css, entre otros.

Se utilizan en programas de diseño como Autocad, Adobe Illustrator, Blender, Inkscape, entre otros.

Además, para hacer recorridos de curvas en las cámaras en UNITY, etc.

Así como para el trazo de gráficas vectoriales donde las curvas son más suaves. El punto inicial y el punto final son los puntos de inicio y fin de la curva, mientras que los otros puntos ayudan a definir la curvatura de la curva.

Referencias

Bravo, O. G. (2011). Modelización con curvas y superficies de Bézier. *Modelling in Science Education and Learning*, 4, https://redib.org/Record/oai_articulo1344194-modelizaci%C3%B3n-con-curvas-y-superficies-de-b%C3%A9zier

Apuntes de Complementos Matemáticos para la Ingeniería Industrial. Tema 2.2. Curvas de Bézier. Visualización en el ordenador. UNED. Recuperado en: <https://www.cartagena99.com/recursos/alumnos/apuntes/ProblemasBezier.pdf>

Stewart, J. Clegg, D. Watson, S. (2021). *Cálculo. Trascendentes tempranas*. Pps. 666 y 684. Cengage. México.

Curva de Bézier. Recuperado en: <https://es.javascript.info/bezier-curve>

Davis, Doug, Cubic Bezier Curve. <https://www.geogebra.org/m/zc3mMQjU>

ROSALBA RODRÍGUEZ CHÁVEZ
PROFESORA DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

CULTURA

CULTURA

PIERRE BÉZIER

Diariamente nos asombramos con los sorprendentes avances tecnológicos, sobre todo quienes hemos transitado ya muchos años en este mundo. Al menos en mi caso particular reflexiono y pienso en cómo hubiera sido mi vida estudiantil o mis primeros años de mi vida profesional si hubiera contado con los recursos tecnológicos actuales y los que vendrán. Por ejemplo, yo recuerdo esas noches de desvelo dibujando las láminas que debía entregar, esos momentos en los que una simple gota de tinta que salpicara me obligaba a tener que repetir el dibujo. Lo difícil que me resultaba el manejo de las escuadras, la regla T y todos los instrumentos de dibujo con los que contaba. Ahora que observo que se cuenta con paquetes o programas que permiten dibujar con asistencia de la computadora. No quisiera que se mal interpretara y se pensara que estoy manifestando que ahora todo es más sencillo y que mi vida estudiantil fue de desdicha en comparación de lo que hoy tienen al alcance nuestros estudiantes. Estoy consciente de que también hoy día hay dificultades que no existían para nosotros. Estas reflexiones más bien están encaminadas a tomar conciencia de grandes personalidades que han impulsado estos grandes avances.

Una de estas aportaciones de debe a un ingeniero (doblemente ingeniero) francés: Pierre Bézier.



Pierre Bézier nació en París en 1910. Fue doblemente ingeniero porque en 1930 obtuvo el título de Ingeniero Mecánico en la École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers y en 1931 el de Ingeniero Eléctrico en la École Supérieure d'Électricité. Siempre manifestó su deseo de prepararse más y en 1977 obtuvo el doctorado de Matemáticas en la Université de Paris.

A él se le reconoce como uno de los más importantes impulsores, si no el que más, del diseño asistido por computadora. Dentro de su desarrollo profesional trabajó en la Renault en donde desarrolló el sistema UNISURF CAD Ganó un premio Steven Anson Coons y un premio Nessim Habif.

En la misma Renault concibió las máquinas transportadoras para la línea de fabricación. De 1968 a 1979 fue profesor en el Conservatoire National des Arts et Métiers.

Fue distinguido como "Caballero de la Legión de Honor" y se le concedió la "Croix de Guerre por sus servicios durante 1939 y 1945.

Bézier falleció en Bures-sur-Ivette en 1999.

Referencias

<https://anniversaire-celebrite.com/pierre-bezier-c6155>

<https://coup2coeur78.wordpress.com/2010/11/28/pierre-bezier/>

ÉRIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA
PROFESOR DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

<http://dcb-c.fi.unam.mx/>

erik2306@unam.mx