MATEMÁTICAS Y CULTURA

B O L E T Í N

23.11.2022 No. 366

COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS *MATEMÁTICAS*

LA REGLA GENERALIZADA DEL PARALELOGRAMO, LAS COMBINACIONES LINEALES Y LA ECUACIÓN DEL PLANO

El objetivo de este artículo es determinar la ecuación de un plano en el espacio mediante la aplicación de algunos conceptos básicos como la regla generalizada de paralelogramo para sumar vectores y uno muy importante de Álgebra Lineal denominado combinación lineal de vectores.

El siguiente enunciado establece dos ideas (postulados) importantes acerca de cómo se puede determinar, de manera general, un plano a partir de otros elementos, llamados puntos; para que a partir de estos puntos sea posible obtener su ecuación cartesiana.

1) Todo plano contiene por lo menos tres puntos distintos no colineales,

2) tres puntos distintos cualesquiera no colineales en el espacio, tienen exactamente un plano que los contiene.

De acuerdo con estas ideas, en la figura 1 se muestra la representación de un plano que pasa por tres puntos conocidos $P, M\ y\ N$; con coordenadas $(x_P, y_P, z_P), (x_M, y_M, z_M)\ y\ (x_N, y_N, z_N)$ no colineales. En la figura 2 se muestra una representación simplificada ausente del marco de referencia y donde se muestra los puntos P, M y N que determinan los puntos por donde pasa el plano. En esta misma figura se añaden otros elementos geométricos como los vectores $\vec{A} = \overrightarrow{PM},\ \vec{B} = \overrightarrow{PN}\ y\ \vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \overrightarrow{PQ};$ con el objeto de resaltar el paralelogramo *PMQN*, que también está contenido en el mismo plano.

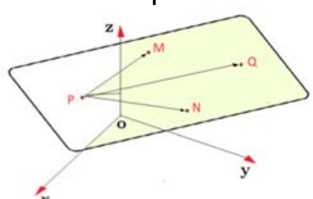


Figura 1

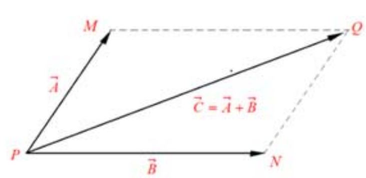


Figura 2

Ley del paralelogramo

Con relación a la figura 2, la suma de dos vectores $\vec{A}\ y\ \vec{B}$, cuyos orígenes están localizados en el punto P, se obtiene, a partir de eta ley, de la siguiente forma. El vector suma

$\vec{A}+\vec{B}$, representado por el vector $\vec{C}$ en el paralelogramo que contiene a estos dos vectores por lados adyacentes, está localizado en la diagonal que parte de *P* y llega a *Q*, es decir el vector $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$

Desde la perspectiva de la geometría analítica vectorial, existe una correspondencia entre vectores y coordenadas de los extremos de los segmentos dirigidos que parten del origen, por ejemplo, en la figura 1, si el vector que va del origen de un marco de referencia arbitrario 0xyz, al punto P de coordenadas (x_P, y_P, z_P), está definido por el segmento $\overrightarrow{OP}$ = $[x_P, y_P, z_P]$ (es común representar con la nomenclatura $\vec{r}_P=\overrightarrow{OP}$), el subíndice caracteriza el extremo del vector de posición $\vec{r}_P$; del mismo modo, los vectores que determinan las posiciones de los puntos *Q*, *M* y *N*, con respecto a ese mismo marco de referencia, quedarán representados de la siguiente forma: $\vec{r}_Q=\overrightarrow{OQ}$ = $[x_Q, y_Q, z_Q]$,

$\vec{r}_M=\overrightarrow{OM}$ = $[x_M, y_M, z_M]$ y $\vec{r}_N=\overrightarrow{ON}$ = $[x_N, y_N, z_N]$.

Con relación a la figura 3, el vector $\vec{A}=\overrightarrow{PM}$ se puede definir atendiendo a la correspondencia que existe entre las coordenadas del punto *M* (x_M, y_M, z_M) y el vector $\vec{r}_M=\overrightarrow{OM}$ = $[x_M, y_M, z_M]$; del mismo modo para el punto P, $\vec{r}_P=\overrightarrow{OP}$ = $[x_P, y_P, z_P]$. luego se obtiene $\vec{A}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}$=$\overrightarrow{PM}$; y del mismo modo, con referencia a la figura 2, el vector $\vec{B}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OP}$ = $\overrightarrow{PN}$.

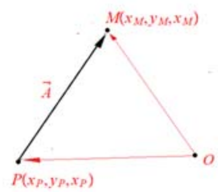
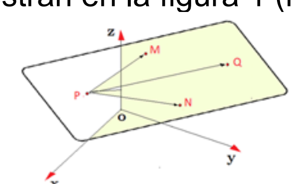


Figura 3

El procedimiento analítico de la manipulación de vectores y sus operaciones básicas tiene grandes ventajas para dar una visión moderna al manejo de la geometría analítica en el espacio. Sobre todo si se aplican conocimientos elementales de Mecánica como es la regla generalizada del paralelogramo o por su nombre equivalente, principio de Stevin, para la reducción de fuerzas, ya que permite incorporar elementos matemáticos muy importantes como son: operaciones de escalares por vectores y su significado geométrico; sistemas de ecuaciones compatibles determinados e indeterminados con el objeto de representar objetos geométricos como lo es un plano; combinaciones lineales de vectores en espacios vectoriales y otras estructuras matemáticas como veremos a continuación.

La aplicación directa de la ley del paralelogramo al sumar dos vectores concurrentes de forma analítica y por medio de ternas ordenadas, es relativamente trivial y poco atractiva, ya que esta operación es muy sencilla, tal como se podrá comprobar en el ejemplo propuesto.

Las coordenadas de los puntos *P*, *M* y *N* son (3, 4, 1), (2, 1, 4) y (8, 6, 7), respectivamente; medidas en metros, tal como se muestran en la figura 1 (repetida).



El lector puede verificar que los vectores que determinan los punto *P*, *M* y *N* del espacio, tienen correspondencia con los siguientes vectores:

$\vec{r}_P = \overrightarrow{OP}$ = [3, 4, 1] m, $\vec{r}_M = \overrightarrow{OM}$ = [2, 1, 4] m y $\vec{r}_N = \overrightarrow{ON}$ =[8, 6, 7] m; a partir de estos resultados se obtienen los vectores: $\vec{A} = \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}$ = [-1, -3, 3] m, $\vec{B} = \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP}$ = [5, 2, 6] m y $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = \vec{A} + \vec{B}$ = [4, -1, 9] m.
La posición del punto Q está dada por el vector $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = [3, 4, 1] + [4, -1, 9] = [7,\ 3,\ 10]\ \mathrm{m}$, a partir de este resultado se deduce que las coordenadas del punto Q son: (7, 3, 10) m.
Como podrá observarse, esta correspondencia: vectores – coordenadas, no presenta gran dificultad, sin embargo, la formulación de otros problemas que suponen la síntesis de la ley del paralelogramo, se enfoca hacia a otro tipo de metodología de solución y, desde luego, a otra dimensión de aprendizaje interpretativo, como son:

1. multiplicación de escalares por vectores,
2. la suma de vectores para formular combinaciones lineales
3. la formulación de ecuaciones vectoriales que conducen al establecimiento de ecuaciones lineales.

Al resolver este tipo de problemas, no tan convencionales, e interpretar sus resultados, es natural que se tenga un panorama integrador de disciplinas y herramientas como el álgebra lineal, la geometría analítica y la mecánica; además, como herramientas de apoyo para resolverlos, como son el uso de software como es Mathemática.
El siguiente problema pretende poner en práctica los tres puntos citados con anterioridad, además de servir como preámbulo para obtener la ecuación de un plano que pasa por tres puntos no colineales.
Considere, en la figura 4, las mismas coordenadas de los puntos *P*, *M* y *N* del problema propuesto; además del vector $\vec{C} = \overrightarrow{PQ}$ y los vectores $\vec{A} = \overrightarrow{PM}$ y $\vec{B} = \overrightarrow{PN}$, concurrentes y no colineales.

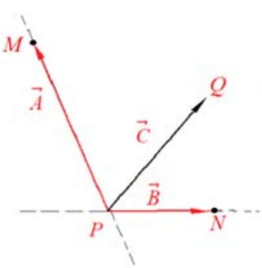


Figura 4

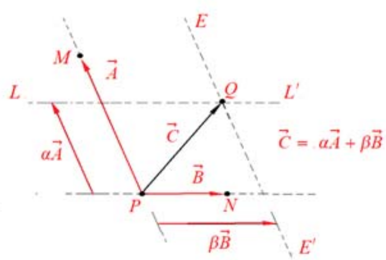


Figura 5

Como podrá observarse en esta misma figura, por simple visualización intuitiva, la configuración geométrica de estos tres vectores no cumple con la ley del paralelogramo, es decir $\vec{C} \neq \vec{A} + \vec{B}$, por lo que se plantea el siguiente problema. Obtener cuánto hay que disminuir la magnitud del vector $\vec{A}$ y aumentar la de $\vec{B}$, dejando intactas sus orientaciones, para que se pueda formar el paralelogramo de lados $\alpha\vec{A}$ y $\beta\vec{B}$, tal como se muestra en la figura 5.

Otra forma de plantear el problema es el siguiente: Cuáles deben valer los escalares α y β para que se cumpla la ley del paralelogramo $\vec{C}$=α$\vec{A}$ + β$\vec{B}$.

La construcción gráfica que se necesita para poder facilitar la interpretación analítica del problema, es la siguiente: Con relación a la figura 5, se pasa una recta $\overline{LL'}$, por el extremo *Q* del vector $\vec{C}$, que sea paralela a la recta donde está contenido el vector $\vec{B}$. Del mismo modo, se pasa una recta $\overline{EE'}$ por el extremo del vector $\vec{C}$, que sea paralela a la recta donde está contenido el vector $\vec{A}$. La construcción de estas dos rectas que se intersecan en el punto C, permite configurar de manera muy ingeniosa el paralelogramo necesario, donde uno de sus lados corresponde al vector β$\vec{B}$, de menor tamaño $\vec{B}$, por lo que β deberá ser un escalar real comprendido en el intervalo 0<β<1, (*que escale al vector $\vec{B}$, disminuyendo su tamaño*). Por otro lado, el vector α$\vec{A}$, deberá tener un mayor tamaño que $\vec{A}$, por lo que el escalar α deberá tener un valor real comprendido en el intervalo 1 < α < ∞, (*que escale al vector $\vec{A}$ aumentando su tamaño*); con la misma explicación de que α es un escalar real. De esta forma, de acuerdo a la figura 5, se tiene, por la ley de paralelogramo

$$\vec{C}=\alpha \vec{A} + \beta \vec{B} \qquad (1)$$

Al miembro derecho de la ecuación anterior, α $\vec{A}$ + β $\vec{B}$ se le conoce como la combinación lineal de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y el miembro izquierdo, el vector $\vec{C}$ es el resultado de dicha combinación lineal, también se le conoce como el vector $\vec{C}$ generado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, de allí que el par de vectores no colineal $\{\vec{A},\vec{B}\}$ se le denomine conjunto generador de paralelogramos *(el enunciado es una ocurrencia mía, de muy mal gusto, para desgracia de los matemáticos*). Dependiendo de la ubicación del punto Q se obtienen los valores de α y β, los cuales son únicos y por lo tanto se tendrá un determinado paralelogramo.

Resuelve el problema para los siguientes puntos: *P*, *M*, *N* y Q con las coordenadas (3, 4, 1), (2, 1, 4) y (8, 6, 7), y $(\frac{14}{3},\frac{1}{3},10)$, como se muestra en la figura 6. Aclaración, los tres puntos están contenidos en un plano.

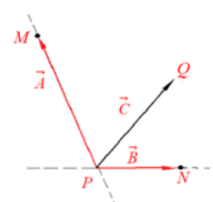


Figura 6

Solución:

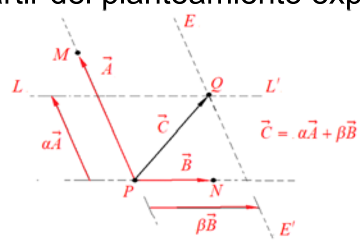
Se plantea la siguiente ecuación vectorial

$\vec{C}$=α $\vec{A}$ + β $\vec{B}$

con los vectores $\vec{A} = \overrightarrow{PM} =$ [-1, -3, 3], $\vec{B} = \overrightarrow{PN} =$ [5, 2, 6] y el vector $\vec{C} = \overrightarrow{PQ} = \left[\frac{5}{3}, -\frac{11}{3},\ 9\right]$, al sustituir los valores de estos vectores en la ecuación anterior

$\left[\frac{5}{3}, -\frac{11}{3},\ 9\right]$= α [-1, -3, 3] + β [5, 2, 6]

Al desarrollar el miembro derecho, ordenar componentes y establecer la igualdad de vectores
$\frac{5}{3}$= -α + 5β
$-\frac{11}{3}$= -3α + 2β
9= 3α + 6β
Después de resolver cualquier par de ecuaciones se tienen los resultados
$\alpha = \frac{5}{3}\ \ y\ \ \beta = \frac{2}{3}$
Comprobación
$\vec{C}$=α $\vec{A}$ + β $\vec{B}$
$\vec{C}$= $\frac{5}{3}$ [-1, -3, 3] + $\frac{2}{3}$ [5, 2, 6]= $\left[\frac{5}{3}, -\frac{11}{3},\ 9\right]$
A continuación, se expondrá un ejemplo para obtener la ecuación de un plano que pasa por tres puntos, a partir de la ecuación (1).
Un plano pasa por los puntos *P*(3, 4, 1), *M*(2, 1, 4) y *N*(8, 6, 7), tal como se muestra en la figura 7, obtener su ecuación a partir del planteamiento expuesto con anterioridad.



Solución
Cualquier punto arbitrario *Q*(x, y, z) que esté contenido en el plano que determinan los puntos *P*, *M* y *N* y queda caracterizado por el vector

$\vec{C}$ = $\overrightarrow{PQ}$ = $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [x, y, z] - [-3, -4, -1] = [x - 3,\ y - 4,\ z - 1]$

Al desarrollar la ecuación vectorial (1)

$\vec{C}$=α$\vec{A}$ + β$\vec{B}$
Los vectores $\vec{A}$ = $\overrightarrow{PM}$= [-1, -3, 3] m, $\vec{B}$ = $\overrightarrow{PN}$ = [5, 2, 6] m y $\vec{C}$ = [x - 3, y - 4, z - 1] m

Al sustituir estas expresiones vectoriales en la ecuación (1)
[x - 3, y - 4, z - 1] = α[-1, -3, 3] + β[5, 2, 6]
Al desarrollar el miembro derecho, después de agrupar componentes de la misma especie, se tienen las siguientes ecuaciones escalares

$$\begin{cases} x - 3 = -\alpha + 5\beta \\ y - 4 = -3\alpha + 2\beta \\ z - 1 = 3\alpha + 6\beta \end{cases}$$

Tres ecuaciones con las incógnitas α, β, y para que el sistema sea compatible, se selecciona una de las coordenadas del punto P, ya sea x, y o z. Se supone que las incógnitas α y β son necesarias para poder determinar los lados del paralelogramo y las coordenadas del punto P *no deben seleccionarse de manera arbitrarias* ya que deben estar contenidas en el plano que determinan los puntos *P*, *M* y *N*, o si se quiere, en el plano donde están contenidos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Al tener presente esta situación, el sistema se puede resolver de tres maneras posibles, dependiendo de la selección de las incógnitas:

a) α, β y z, expresadas en términos de x e y
b) α, β y y, expresadas en términos de x y z
c) α, β y x, expresadas en términos de y y z

Al final de cuentas el resultado general será exactamente el mismo, como se verá a continuación.

Al seleccionar la primera opción, el sistema de ecuaciones se ordena de tal forma que el conjunto de variables $\{\alpha, \beta\ z\}$ sean las incógnitas para resolver en términos de x e y

$$\begin{cases} -\alpha + 5\beta = x - 3 \\ -3\alpha + 2\beta = y - 4 \\ 3\alpha + 6\beta - z = -1 \end{cases}$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-3 \\ y-4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Después de resolver para α, β y z

$\alpha = \frac{1}{13}(14 + 2x - 5y)$ (2)

$\beta = \frac{1}{13}(-5 + 3x - y)$ (3)

$z = \frac{1}{13}(25 + 24x - 21y)$ (4)

La ecuación (4), al expresarla de la siguiente forma

$24x - 21y - 13z = -25$ (5)

determina la forma como están relacionadas las coordenadas que debe tener el extremo *Q*(x, y, z) del vector $\vec{C}$. Como es de suponer, estas coordenadas están contenidas en el plano que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, o de otra forma: corresponde l modelo de la ecuación del plano en donde están contenidos los puntos *P*, *M* y *N*. El lector puede verificar que los puntos *P*(3, 4, 1), *M*(2, 1, 4) y *N*(8, 6, 7), cumplen con la ecuación del plano dada por la ecuación (5).

Como colofón de este artículo, en el siguiente número del Boletín se propondrá un ejemplo y veremos si el lector se atrévete a resolverlo.

HUGO GERMÁN SERRANO MIRANDA
PROFESOR DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM