MATEMÁTICAS Y CULTURA

B O L E T Í N

23.02.2023 **No. 367**

COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS **MATEMÁTICAS**

UN PROBLEMA QUE RELACIONA GEOMETRÍA ANALÍTICA CON ÁLGEBRA

Problema

Sean los vectores $\overline{a}=(1,-1,1), \overline{b}=(1,1,1)$ y $\overline{c}=(x,-1,-1)$. Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\overline{a}$, $\overline{b}$ y $\overline{c}$ entre dos veces el valor absoluto de la primera componente del vector $\overline{c}$, sea:

a) menor o igual a dos.
b) mayor o igual a dos.

Solución

a) Volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\overline{a}$, $\overline{b}$ y $\overline{c}$: $V=\left|\left[\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right]\right|=\left|\overline{a}\times\overline{b}\bullet\overline{c}\right|$

$$\left[\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right]=\overline{a}\times\overline{b}\bullet\overline{c}$$

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\hat{i}(-2)-\hat{j}(0)+\hat{k}(2)$$

$$\overline{a}\times\overline{b}=(-2,0,2)$$

$$\overline{a}\times\overline{b}\bullet\overline{c}=(-2,0,2)\bullet(x,-1,-1)$$

$$\overline{a}\times\overline{b}\bullet\overline{c}=-2x-2$$

$$V=\left|-2x-2\right|=\left|(-1)(2x+2)\right|=\left|-1\right|\left|2x+2\right|=\left|2x+2\right|=2\left|x+1\right|$$

Para obtener el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\overline{a}$, $\overline{b}$ y $\overline{c}$ también se puede proceder como sigue:

$$v = \left| \left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} \right] \right|$$

$$\left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} \right] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1(0) - (-1)(-1-x) + 1(-1-x)$$

$$\left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} \right] = -1 - x - 1 - x$$

$$\left[\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} \right] = -2x - 2$$

$$V = |-2x-2| = |2x+2| = 2|x+1|$$

En este inciso se pide que:

$$\frac{V}{2|x|} \leq 2$$

como $V = 2|x+1|$ entonces

$$\frac{2|x+1|}{2|x|} \leq 2$$

$$\frac{|x+1|}{|x|} \leq 2$$

$$\left| \frac{x+1}{x} \right| \leq 2$$

Utilizando el teorema de Álgebra

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \geq 0.$ Se tiene que $|y| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq y \leq \alpha$

se obtiene la siguiente doble desigualdad acoplada

$$-2 \leq \frac{x+1}{x} \leq 2$$

El conjunto solución de la desigualdad $\left| \frac{x+1}{x} \right| \leq 2$ es la intersección del conjunto solución de la desigualdad $-2 \leq \frac{x+1}{x}$ con el conjunto solución de la desigualdad $\frac{x+1}{x} \leq 2.$

Primera desigualdad.

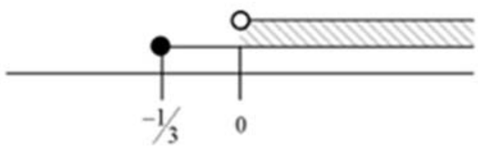
$$-2 \le \frac{x+1}{x}$$

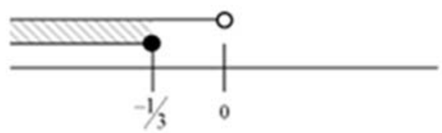
Caso 1: $x > 0$

$$-2x \le x+1$$
$$-1 \le x+2x$$
$$-1 \le 3x$$
$$-\frac{1}{3} \le x$$

Caso 2: $x < 0$

$$-2x \ge x+1$$
$$-1 \ge x+2x$$
$$-1 \ge 3x$$
$$-\frac{1}{3} \ge x$$





Conjunto solución del caso 1:

$$\{x | x > 0\}$$

Conjunto solución del caso 2

$$\left\{x \middle| x \le -\frac{1}{3}\right\}$$

Conjunto solución de la primera desigualdad

$$\left\{x \middle| x \le -\frac{1}{3}\right\} \cup \{x | x > 0\}$$

Segunda desigualdad.

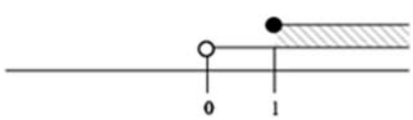
$$\frac{x+1}{x} \le 2$$

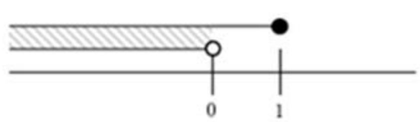
Caso 1: $x > 0$

$$x+1 \le 2x$$
$$1 \le 2x - x$$
$$1 \le x$$

Caso 2: $x < 0$

$$x+1 \ge 2x$$
$$1 \ge 2x - x$$
$$1 \ge x$$





Conjunto solución del caso 1

$$\{x|x \geq 1\}$$

Conjunto solución del caso 2

$$\{x|x < 0\}$$

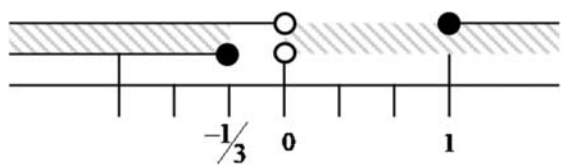
Conjunto solución de la segunda desigualdad

$$\{x|x < 0\} \cup \{x|x \geq 1\}$$

Conjunto solución general.

$$\text{Conjunto solución de la primera desigualdad} \cap \text{Conjunto solución de la segunda desigualdad}$$

$$\left\{x\middle|x \leq -\frac{1}{3}\right\} \cup \{x|x > 0\} \cap \{x|x < 0\} \cup \{x|x \geq 1\}$$



En consecuencia, los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\overline{a}$, $\overline{b}$ y $\overline{c}$ entre dos veces el valor absoluto de la primera componente del vector $\overline{c}$ es menor o igual a dos, pertenecen al conjunto:

$$\left\{x\middle|x \leq -\frac{1}{3}\right\} \cup \{x|x \geq 1\}$$

Ahora habrá que obtener $x \in \mathbb{R}$ para que:

$$\frac{V}{2|x|} \geq 2$$

$$\frac{2|x+1|}{2|x|} \geq 2$$

$$\left|\frac{x+1}{x}\right| \geq 2$$

Haciendo uso del teorema de Álgebra:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \geq 0$, se tiene que $|y| \geq \alpha \Leftrightarrow\ y \leq -\alpha$ ó $y \geq \alpha$

Se determina que

$$\left|\frac{x+1}{x}\right| \geq 2 \ \Leftrightarrow\ \frac{x+1}{x} \leq -2 \ \text{ ó } \ \frac{x+1}{x} \geq 2$$

Primera desigualdad

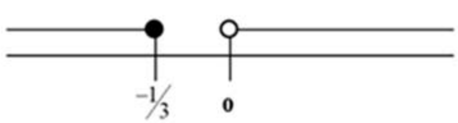
$$\frac{x+1}{x} \leq -2$$

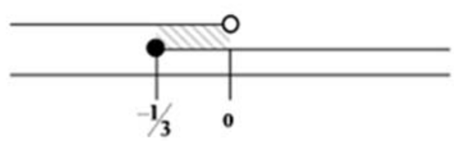
Caso 1: $x > 0$

$$x+1 \leq -2x$$
$$x+2x \leq -1$$
$$3x \leq -1$$
$$x \leq -\frac{1}{3}$$

Caso 2: $x < 0$

$$x+1 \geq -2x$$
$$x+2x \geq -1$$
$$3x \geq -1$$
$$x \geq -\frac{1}{3}$$





Conjunto solución del caso 1

$$\phi$$

Conjunto solución del caso 2

$$\left\{x \middle| -\frac{1}{3} \leq x < 0\right\}$$

Conjunto solución de la primera desigualdad

$$\left\{x \middle| -\frac{1}{3} \leq x \leq 0\right\}$$

Segunda desigualdad.

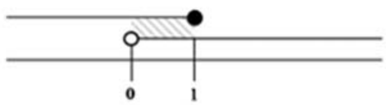
$$\frac{x+1}{x} \geq 2$$

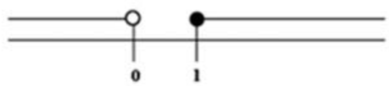
Caso 1: $x > 0$

$$x+1 \geq 2x$$
$$1 \geq 2x - x$$
$$1 \geq x$$

Caso 2: $x < 0$

$$x+1 \leq 2x$$
$$1 \leq 2x - x$$
$$1 \leq x$$





Conjunto solución del caso 1

$$\{x | 0 < x \leq 1\}$$

Conjunto solución del caso 2

$$\phi$$

Conjunto solución de la segunda desigualdad

$$\{x | 0 < x \leq 1\}$$

En este caso, el conjunto solución general es la unión del conjunto solución de la primera desigualdad con el conjunto solución de la segunda desigualdad, es decir:

Conjunto solución de la primera desigualdad $\cup$ Conjunto solución de la segunda desigualdad

En consecuencia, los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\overline{a}$, $\overline{b}$ y $\overline{c}$ entre dos veces el valor absoluto de la primera componente del vector $\overline{c}$ es mayor o igual a dos, pertenecen al conjunto:

$$\left\{x \middle| -\frac{1}{3} \leq x < 0\right\} \cup \{x | 0 < x \leq 1\} = \left\{x \middle| -\frac{1}{3} \leq x \leq 1\right\} - \{0\}$$

JUAN VELÁZQUEZ TORRES
PROFESOR DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM