MATEMÁTICAS Y CULTURA

B O L E T Í N

23.03.2023 **No. 368**

COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS *MATEMÁTICAS*

LA IMPORTANCIA DE LA IDENTIFICACIÓN DE SUPERFICIES

En este mundo, en esta vida, nada permanece estático. Se dice que lo único que no cambia es la existencia de cambios. Algunos de ellos muy deseados y otros sumamente indeseables. Dentro de nuestra UNAM, como en cualquier institución educativa, los planes y programas de estudio no solamente es conveniente su análisis permanente y sus modificaciones, sino que resulta obligatorio de acuerdo con la legislación de esta casa de estudios. De nuevo, algunas modificaciones son plausibles mientras que otras son, lo menos, discutibles. En mi opinión, y quiero enfatizar, voy a externar un punto de vista personal, un concepto que debería permanecer en nuestros planes de estudio para cualquiera de las carreras que se ofrecen en la Facultad, es el estudio de las ***superficies.*** Baso esta aseveración en el hecho de que en asignaturas consecuentes es indispensable su conocimiento y manejo. Obviamente resulta indispensable, por lo pronto, su identificación.

A continuación, se presenta un ejercicio en el que se tiene como dato una ecuación vectorial de una superficie (se expresa como *una ecuación vectorial* puesto que puede tener múltiples expresiones vectoriales dependiendo de la “parametrización”) y se requiere su identificación. Se emplearán dos procedimientos y, sorpresivamente, se culmina con identificarla como una superficie con uno de los procedimientos y como otra al aplicar el otro procedimiento. Evidentemente, el tipo de superficie es un invariante; es decir, no depende del procedimiento para su identificación. ¿Cuál es el correcto?

EJERCICIO. Se trata del ejercicio 35 de la serie 2 (2022-1) de Cálculo Vectorial, el cual se transcribe, aunque solamente nos limitaremos a la identificación de la superficie.

Sea $\bar{r}(s,t) = (2s)\ i + (sen\ t + 2s\cos t)\ j + (\cos t - 2s\ sen\ t)\ k$, una ecuación vectorial de la superficie S.

a. Identificar la superficie S.
b. Obtener una ecuación vectorial del plano tangente a S en el punto $P(1, \sqrt{2}, 0)$.

PRIMER PROCEDIMIENTO.
Las ecuaciones paramétricas correspondientes de S son:

$$\begin{cases} x = 2s & \ldots\ (1) \\ y = sen\ t + 2s\cos t & \ldots\ (2) \\ z = \cos t - 2s\ sen\ t & \ldots\ (3) \end{cases}$$

Sustituyendo (1) en (2) y en (3):

$$\begin{cases} y = \ sen\,t \ + \mathrm{x}\cos t & \ldots \quad (4) \\ z = \cos t - x\,sen\,t & \ldots \quad (5) \end{cases}$$

Elevando al cuadrado estas dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \ y^2 = sen^2t + 2x\,sen\,t\cos t + x^2cos^2t \\ z^2 = cos^2t - 2x\,sen\,t\cos t + x^2sen^2t \end{cases}$$

Sumando:

$$y^2 + z^2 = x^2(sen^2t + cos^2t) + sen^2t + cos^2t$$

Finalmente:

$$y^2 + z^2 = x^2 + 1 \quad \ldots \quad (S)$$

Se tiene un hiperboloide de un manto con eje en el de las abscisas y centro en el origen.
SEGUNDO PROCEDIMIENTO
El inicio es el mismo:
Las ecuaciones paramétricas correspondientes de S son:

$$\begin{cases} x = 2s & \ldots \quad (1) \\ y = sen\,t + 2s\cos t & \ldots \quad (2) \\ z = \cos t - 2s\,sen\,t & \ldots \quad (3) \end{cases}$$

Sustituyendo (1) en (2) y en (3):

$$\begin{cases} y = sen\,t \ + \mathrm{x}\cos t & \ldots \quad (4) \\ z = \cos t - x\,sen\,t & \ldots \quad (5) \end{cases}$$

De (4) y (5) despejando $\cos t$ y $sen\,t$ respectivamente:

$$sen\,t = y - x\cos t$$
$$\cos t = z + x\,sen\,t$$

Como $sen^2t + cos^2t = 1$:

$$(y - x\cos t)^2 + (z + x\,sen\,t)^2 = 1$$

$$y^2 - 2xy\cos t + x^2cos^2t + z^2 + 2xy\,sen\,t + x^2sen^2t = 1$$

Simplificando y tomando en cuenta de nuevo la identidad pitagórica:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy\cos t + 2xz\,sen\,t = 1$$

Como intervienen los productos xy y xz efectuamos una rotación de ejes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\cos t & sen\,t \\ -\cos t & 1 & 0 \\ sen\,t & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\cos t & sen\, t \\ -\cos t & 1-\lambda & 0 \\ sen\, t & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Con el método de cofactores y empleando el tercer renglón:

$$sen\, t[-(1-\lambda)sen\, t] + (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - cos^2 t] = 0$$

$$sen\, t(-sen\, t + \lambda\, sen\, t) + (1-\lambda)^3 - cos^2 t + \lambda\, cos^2 t = 0$$

$$-sen^2 t + \lambda\, sen^2 t + 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 - cos^2 t + \lambda\, cos^2 t = 0$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda = 0 \qquad -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 0$

Estos valores propios son los coeficientes de la ecuación de la superficie una vez que se ha realizado la rotación de ejes, por lo que S tiene como ecuación en el sistema coordenado x', y', z'

$$x'^2 + 2y'^2 = 1$$

Entonces se trata de un cilindro elíptico girado.

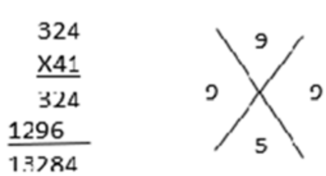
Es obvio que un hiperboloide de un manto no es lo mismo que un cilindro elíptico, con lo que hemos arribado a una incongruencia. Es evidente que uno de los dos resultados es incorrecto. Para motivar a la búsqueda de la incorrección, a la primera o primer estudiante que envíe al correo eriksumem@gmail.com su análisis y la determinación de cuál es el resultado correcto y cuál el incorrecto especificando y justificando sus resoluciones, se le entregará un libro.

ÉRIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA
PROFESOR DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

MATEMÁTICAS ***MATEMÁTICAS***

COMPROBACIÓN DE OPERACIONES ARITMÉTICAS BÁSICAS SIN CALCULADORA

Hace algunos ayeres, se enseñaba en las escuelas primarias la forma de comprobar si una operación aritmética estaba correcta. De hecho, era usual que el profesor o la profesora pusiera a los alumnos a realizar muchas sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, pero todas con su comprobación. Por ejemplo, si se trataba de una multiplicación se tenía que escribir a la derecha de la operación la comprobación tal como se muestra en la siguiente figura:



A los que nos tocó vivir esa época, recordaremos que hasta se hacía un ambiente de competencia por ser el primero en acabar todos los ejercicios. Obviamente, todas estas actividades se realizaban sin hacer uso de una calculadora, porque dicho sea de paso íbamos a la escuela sin la preocupación de "se me olvido la calculadora".

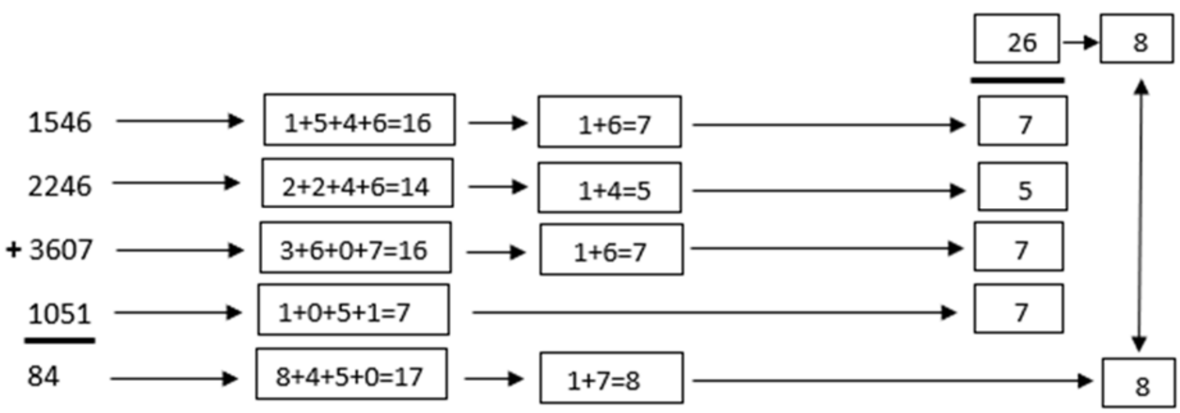
Hoy en día, cuando imparto la asignatura Álgebra tengo que realizar muchas operaciones aritméticas y me llama la atención que los alumnos se asombran cuando al terminar la operación les digo "déjenme comprobar si la hice correctamente" y hago en el pizarrón lo que mostré en la figura anterior; inmediatamente más de uno me pregunta ¿cómo le hizo profesor? acto seguido me piden les enseñe esa prueba y créanme que después de la explicación escucho muchos OHHHHH.

Es así, como me surgió la inquietud de escribir este artículo en el que mostraré la forma de comprobar una suma, una resta, una multiplicación y una división. Entiendo, por supuesto, que lo que explicaré es muy conocido por todos los que aprendimos aritmética sin calculadora.

Prueba de la suma

1) Se adicionan las cifras de cada uno de los sumandos, en caso de que el resultado esté formado por dos o más cifras se vuelven a sumar hasta obtener un número de un sólo dígito.
2) Se adicionan las cifras del número que es la suma total, nuevamente si resulta un número de dos o más cifras se vuelven a sumar hasta obtener un número de un sólo dígito.
3) Se adicionan los números de un sólo dígito que resultaron de cada uno de los sumandos, de igual forma si resulta un número de dos o más cifras se vuelven a sumar hasta obtener un número de un sólo dígito.
4) Si los números obtenidos en los puntos (2) y (3) son iguales la suma está correcta.

Ejemplo



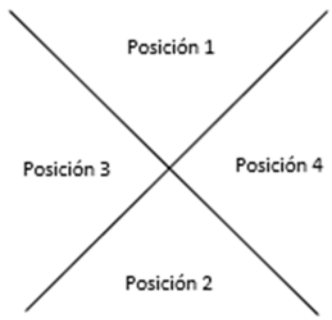
Prueba de la resta

Esta prueba es sumamente sencilla, simplemente se le adiciona a la diferencia el sustraendo y la suma debe ser igual al minuendo.

Minuendo	56382		Diferencia	21926
	−			+
Sustraendo	34456		Sustraendo	34456
Diferencia	21926		Minuendo	56382

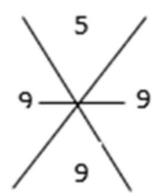
Prueba de la multiplicación

1) Se adicionan las cifras del multiplicando, en caso de que el resultado esté formado por dos o más cifras se vuelven a sumar hasta obtener un número de un sólo dígito, este número se coloca en la posición 1.
2) Se adicionan las cifras del multiplicador, nuevamente si resulta un número de dos o más cifras se vuelven a sumar hasta obtener un número de un sólo dígito, este número se coloca en la posición 2.
3) Se multiplican los números de las posiciones (1) y (2), de igual forma si resulta un número de dos o más cifras se vuelven a sumar hasta obtener un número de un sólo dígito, el resultado de esta multiplicación se escribe en la posición 3.
4) Se adicionan las cifras del producto, considerando que si da un número de dos o más cifras se vuelven a sumar hasta obtener un número de un sólo dígito, este número se escribe en la posición 4. Si los números obtenidos en las posiciones (3) y (4) son iguales la multiplicación es correcta.



Ejemplo

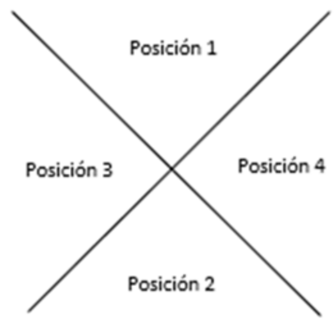
Multiplicando	9824
Multiplicador	X 27
	68768
	19648
Producto	265248



Prueba de la división

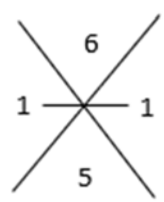
Cociente
Divisor | Dividendo
Residuo

1) Se adicionan las cifras del cociente, en caso de que el resultado esté formado por dos o más cifras se vuelven a sumar hasta obtener un número de un sólo dígito, este número se escribe en la posición 1.
2) Se adicionan las cifras del divisor, nuevamente si resulta un número de dos o más cifras se vuelven a sumar hasta obtener un número de un sólo dígito, este número se escribe en la posición 2.
3) Se adicionan las cifras del dividendo, de igual forma si resulta un número de dos o más cifras se vuelven a sumar hasta obtener un número de un sólo dígito, este número se escribe en la posición 3.
4) Se multiplican los números de las posiciones (1) y (2) y al resultado se le adiciona el residuo, después se adicionan las cifras de la suma obtenida. Considerando que si la suma da un número de dos o más cifras se vuelven a sumar hasta obtener un número de un sólo dígito, este número se escribe en la posición 4. Si los números obtenidos en las posiciones (3) y (4) son iguales la división es correcta.



Ejemplo

```
     375
23 | 8632
     173
      122
        7
```



Espero que este artículo sea de utilidad, de curiosidad y de diversión para las nuevas generaciones.

JUAN VELÁZQUEZ TORRES
PROFESOR DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

http://dcb.fi-c.unam.mx erik2306@unam.mx