

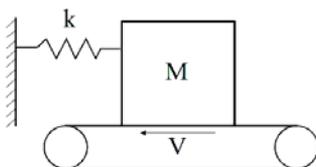


## El fenómeno “Stick-Slip”: un proyecto pedagógico para la asignatura Ecuaciones Diferenciales

Tradicionalmente se cree que algunas materias de ciencias básicas que se imparten en la Facultad de Ingeniería son puramente teóricas. Un ejemplo de ello es la materia de Ecuaciones Diferenciales (ED). Si bien, el temario de dicha materia contempla el estudio de ciertas aplicaciones, en la mayoría de las veces éstas no salen del pizarrón y del papel. Sin embargo, creemos que para apreciar con mayor fuerza y claridad el gran poder que tienen las ED para describir diversos procesos y fenómenos (sociales, biológicos, físicos, industriales, entre otros) es necesario además de su análisis teórico su análisis experimental.

Esto último implica la fabricación de modelos o prototipos y su instrumentación para la medición de variables de interés, así como la comparación entre las predicciones teóricas (las soluciones analíticas-numéricas de las ED) y los resultados experimentales (el comportamiento real del modelo o prototipo). Por supuesto existe una amplia y variada gama de fenómenos y sistemas que pueden ser estudiados bajo el esquema arriba descrito.

En este artículo se propone el estudio teórico-experimental del fenómeno “stick-slip”, el cual se puede reproducir usando un bloque de masa  $M$  (de cierto material), un resorte mecánico de rigidez  $k$ , y una banda transportadora con velocidad  $V$ , ver Figura 1.



*Figura 1 Arreglo de masa, resorte y banda para producir el fenómeno “stick-slip”.*

En dicho fenómeno intervienen la fuerza del resorte y las fuerzas de fricción estática y dinámica en la zona donde hacen contacto el bloque y la banda; todo esto en combinación con la velocidad de la banda produce un movimiento oscilatorio del bloque. Para comprender con claridad la dinámica de un sistema

“stick-slip” se sugiere ver el video que se encuentra en la liga (<https://www.youtube.com/watch?v=TcebgbomjRs>).

El proyecto consiste en invitar a los alumnos a construir un modelo como el de la Figura 1. Los requerimientos son: a) poder controlar la velocidad,  $V$ , de la banda y b) tener la posibilidad de usar diferentes materiales para la banda y el bloque de masa  $M$ ; en otras palabras, tener la posibilidad de trabajar con diferentes coeficientes de fricción. En este punto vale la pena establecer con precisión los objetivos fundamentales que se persiguen con el proyecto: i) fabricar un prototipo que recree adecuadamente el fenómeno de estudio, ii) resolver numérica o analíticamente un modelo matemático (constituido por ED y sus correspondientes condiciones iniciales y/o de frontera) que presumiblemente describa el fenómeno de estudio y que se encuentre planteado en la literatura especializada, iii) realizar una comparación “cualitativa” entre los comportamientos experimental y teórico-numérico del prototipo, iv) incentivar el trabajo en equipo fuera del aula, v) motivar la investigación autodidacta, vi) incentivar el uso de tecnologías y herramientas de fácil disponibilidad, y vii) asociar el proceso estudiado con otros fenómenos similares pertenecientes a diversas áreas del conocimiento.

La experiencia adquirida con diversos proyectos y grupos de estudiantes indican que el primer objetivo es perfectamente viable para la mayoría de alumnos de licenciatura de los primeros semestres de Ingeniería. La fabricación y puesta en funcionamiento de un prototipo como el que se sugiere aquí, se puede lograr en un tiempo razonable si se pone atención en dos aspectos importantes: 1) Establecer la fuerza de fricción cinética entre el bloque y la banda, lo cual es posible experimentando con diferentes materiales para el bloque y la banda, y midiendo al mismo tiempo la fuerza de fricción con un dinamómetro (<https://www.youtube.com/watch?v=uEGxfRoEq64>). 2) Una vez que se ha estimado la fuerza de fricción, se puede fijar el diámetro del rodillo motriz de la banda y de esta manera estimar el par necesario para vencer la fricción.

Adicionalmente, hay que considerar la tensión de la banda y las pérdidas por fricción en los baleros de los rodillos. Todo esto nos puede dar una idea del tipo de motor a utilizar, la potencia que ha de entregar y el tipo de control para regular su velocidad angular. El objetivo ii) se puede cubrir con relativa facilidad utilizando programas especializados para realizar cálculos matemáticos como: Mathematica, Maple y Matlab. Cada uno de estos programas cuenta con comandos especializados para resolver numéricamente ED no lineales.

De acuerdo a la experiencia con diferentes grupos de estudiantes, es posible cubrir el objetivo iii) en la mayoría de ocasiones. La razón es que el estudiante no tiene que plantear el modelo, sólo debe resolverlo (numérica o analítica-

mente); además, no resulta indispensable establecer con precisión el valor de los parámetros que estén contenidos en las ED. La idea se resume en obtener soluciones que muestren comportamientos y tendencias que se puedan reconocer al hacer comparaciones contra los resultados experimentales. Esto resulta ser una gran lección y un primer paso para que el estudiante reconozca el valor que tienen las ED como herramientas descriptivas-predictivas.

En relación con el objetivo vi) se pueden sugerir algunas recomendaciones útiles. En la actualidad es muy fácil adquirir o pedir prestado un teléfono celular con video cámara incluida. Muchos fenómenos se pueden video grabar y a partir de los videos obtener información de su comportamiento. Sólo una recomendación: hay que tener en cuenta la velocidad del proceso para establecer adecuadamente la velocidad de adquisición de video (en fps, o cuadros por segundo, por sus siglas en inglés). El análisis de videos y la obtención de información valiosa sobre el comportamiento de un sistema se pueden adquirir con programas especializados como Tracker (<http://physlets.org/tracker/>) y Kinovea (<http://www.kinovea.org/>), por cierto, ambos de fácil uso y acceso libre. También otra posibilidad de bajo costo y de uso fácil es la plataforma Arduino que permite instrumentar prototipos y adquirir mediciones de diferentes variables (<https://sites.google.com/site/unameneterobotica/>).

En relación con el objetivo vii), es interesante hacer notar que el fenómeno “stick-slip” aparece en muy variadas situaciones y de sumo interés en diversas disciplinas como: al hacer sonar un violín cuando el arco roza sus cuerdas, al producirse el movimiento relativo entre placas tectónicas durante un terremoto, al frenar un automóvil, entre otros fenómenos.

Creemos que para brindar una formación más completa es necesario que el estudiante **construya** prototipos, sistemas y procesos con sus propias manos; para luego **aplicar** herramientas (como las ED) y conceptos teóricos que le permitan realizar un análisis profundo del comportamiento de lo que ha construido. Cerramos parafraseando un proverbio del pensador chino Confucio: “Cuando les cuento algo a mis estudiantes lo olvidan; cuando lo ven en ciertas ocasiones lo entienden; cuando lo hacen, la mayoría de las veces lo aprenden”.

*Francisco Antonio Godínez Rojano*  
*Profesor de Asignatura de la Facultad de Ingeniería*

## ¿Qué es el fenómeno stick-slip en un sistema mecánico?

- ¡Hay señor Cantinflas!, ¿cómo está eso de que me va a invitar a un picnic?

- Pos ora lo verá Marianita, es una comidita campirana y al mismo tiempo una aventurita en el campo virgen ... en los arbolitos, ... en la yerbita, - por allá en Milpa Alta -. Mire, es muy fácil, yo pongo el pic y usted el nic.

¡Ay... yuyuy, ya lo verá, ya lo verá: va a ser: i-nol-vi-da-ble.

*Pasaje de la película el barrendero*

En muchos de los fenómenos mecánicos, la fricción produce movimientos vibratorios indeseables, producen desgaste, ruido y por consiguiente, disipación de energía debido a estos efectos.

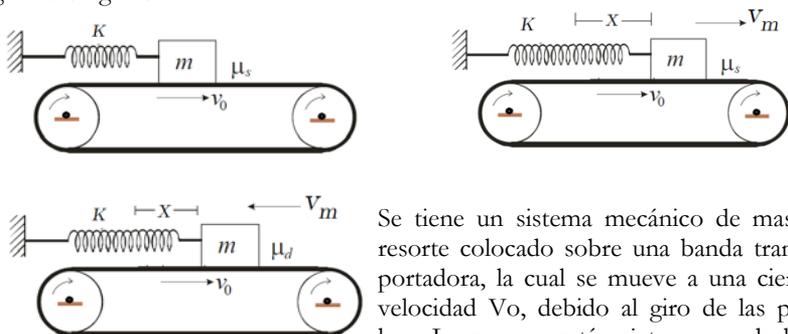
La tribología es una disciplina que se encarga de estudiar las fuerzas de fricción entre dos superficies deslizantes, por ejemplo, cuando en un coche que lleva una cierta velocidad, si el conductor realiza intempestivamente un frenado brusco, las llantas dejan de girar y patinan (movimiento de traslación) sobre el pavimento. Luego, la parte inferior de la llanta, que en realidad es una superficie en contacto con el pavimento, desliza con respecto a él. Pues bien, la tribología estudia este fenómeno en toda su extensión de aspectos influyentes: temperatura, humedad, tipos de materiales, efectos electromagnéticos y acústicos ... ¡hasta el humor y simpatía de las llantas! Esta parte de la mecánica constituye un campo de investigación que continuamente se está actualizando debido a las ocurrencias y descubrimientos de jóvenes investigadores.

En el siglo XV, Leonardo da Vinci introdujo el concepto de coeficiente de fricción; a juzgar por la época, este señor ya había dejado constancia acerca de este fenómeno antes que los estudiosos Coulomb y Morin publicaran sus trabajos. Este hecho, indudablemente extraño, pero de ninguna manera motivo de asombro, en virtud de la personalidad artística e innovadora del Gran Leonardo.

La fuerza de fricción estática, es la fuerza que hay que vencer para que dos superficies inicialmente en reposo, una con respecto a la otra, puedan ponerse en movimiento relativo. Una vez logrado este movimiento, se dice que ahora se da paso a la fuerza de fricción cinética; esta fuerza entre superficies se debe al movimiento relativo entre ellas, de allí su nombre. Generalmente se obtiene a partir del coeficiente de fricción,  $\mu$ , y de la magnitud de la fuerza normal,  $N$ , entre ambas superficies.

Las leyes de fricción son leyes empíricas, es decir tienen un carácter experimental y por lo tanto, además de misterios científicos, imprecisiones en su determinación: Estos aspectos se deben a que el coeficiente de fricción es muy díscolo, ya que depende principalmente de si se mueven o no se mueven las superficies, de la temperatura, del tiempo que han estado en contacto sin deslizamiento y, muy importante, *depende de los caprichos de una velocidad llamada velocidad de arrastre  $V_m$* , velocidad de la cual hablaremos a continuación.

Para explicar el fenómeno que da el nombre de *stick-slip*, referirse a la siguientes figuras.



Se tiene un sistema mecánico de masa-resorte colocado sobre una banda transportadora, la cual se mueve a una cierta velocidad  $V_0$ , debido al giro de las poleas. La masa  $m$  está sujeta a uno de los extremos del resorte lineal de constante  $K$  y el otro extremo del resorte a un punto fijo. En este caso, la velocidad de arrastre se refiere a la velocidad relativa entre las siguientes superficies a) inferior de contacto del cuerpo con la banda y b) externa de la banda en contacto con el cuerpo.

En la figura superior izquierda, la posición horizontal de la banda se supone que es  $X=0$ , cuando el resorte no está alargado ni comprimido (longitud natural). En este preciso momento, el cuerpo se mueve hacia la derecha debido a la fuerza de fricción entre la banda y la parte inferior del cuerpo; sin embargo, *la velocidad de arrastre vale cero*.

En la figura de la derecha, la fricción estática deforma al resorte una distancia  $X$  que, a pesar de estar presente, está actuando esta fuerza sobre el cuerpo, que se se sigue moviendo hacia la derecha. Durante este lapso *la velocidad de arrastre sigue siendo nula*.

Por último, en la figura de abajo, cuando la fricción estática se rompe por la acción de la fuerza del resorte, el bloque se moverá hacia la izquierda respecto a la banda, luego tiene *velocidad de arrastre diferente de cero*.

En las dos primeras figuras se tiene que las dos superficies se desplazan simultáneamente, adheridas, ... *stick*. En la tercer figura, cuando la fricción estática desaparece e interviene la fricción cinética, las dos superficies *deslizan* una con respecto a la otra, rápidamente, ... *slip*. Posteriormente, a partir de un determinado intervalo de tiempo las superficies vuelven a quedar adheridas, y entonces se repite un nuevo proceso *stick-slip*.

### El violín y el fenómeno *stick-slip*

En todos los instrumentos musicales de *cuerda*, cuando se inicia el *frotamiento de la cuerda* por medio de un arco de cerdas, al inicio del proceso el rozamiento es estático y el arco mueve a la cuerda con una determinada velocidad respecto al cuerpo del violín, sin embargo, no existe movimiento relativo de las superficies

en contacto (cerdas del arco y cuerda del violín, es decir, *velocidad de arrastre nula*), hasta que la fuerza de restitución elástica de la cuerda sea igual al máximo valor permitido por el rozamiento estático. A partir de este momento, la cuerda comienza a retroceder con respecto a las cerdas del arco bajo la fuerza del rozamiento cinético, (*velocidad de arrastre diferente de cero*), que siempre es menor que la fricción estática máxima, adoptando temporalmente un movimiento vibratorio a causa de esta fuerza de restitución elástica de la cuerda.

En esta parte del proceso con movimiento vibratorio, se llega al momento en que la velocidad de la cuerda con respecto al arco es nula (*velocidad de arrastre nula*) y el rozamiento se vuelve estático. En este instante tenemos la misma situación del principio, y se ha completado un período del ... ***stick-slip***.

### ***La analogía perfecta de sistemas: modelo mecánico banda y violín***

La cuerda del violín *es como si fuera* el resorte, que tiene una constante  $K$ .

La fricción estática y cinética entre las cerdas del arco y la cuerda del violín *es como si fueran* los coeficientes entre las superficies del cuerpo de masa  $m$  y de la banda transportadora.

La fuerza de apoyo del arco sobre la cuerda del violín *es como si fuera* la normal ejercida por la banda transportadora sobre la superficie inferior del cuerpo

Lo expuesto en este artículo, pretende dejar al lector una lección muy sensible, a manera de moraleja:

*No todo ruido ocasionado por una fuerza de fricción que produce un efecto vibratorio, puede ser necesariamente indeseable, al mismo tiempo, hay ciertas velocidades discolas entre cuerpos que ocasionan silencio y otras que producen sonidos musicales ... agradables.*

Muy fácil de creer, no tan fácil de interpretar pero ... excelente fenómeno para modelar.

*Hugo Serrano Miranda*  
*Profesor de carrera de la DCB*

## **Comentarios sobre la ideación y construcción de prototipos físicos**

El proyecto PE109415 “Aprendizaje basado en problemas y el colaborativo para potenciar el aprendizaje de los alumnos de ciencias básicas”, desarrollado por alumnos y profesores de la División de Ciencias Básicas, tiene como objetivo principal “Promover la aplicación del Aprendizaje Basado en Problemas, ABP, y el Aprendizaje Colaborativo, AC, en las asignaturas de ciencias básicas por medio del diseño y la construcción de prototipos tecnológicos simples que realicen los alumnos, incorporando ambientes de aprendizaje interdisciplinarios y la vinculación de la teoría con la práctica”. Bajo este proyecto, alumnos de varias asignaturas han desarrollado prototipos diversos, con objeto de forta-

lecer el aprendizaje de la materia cursada, además de impulsar a los alumnos al desarrollo de conocimientos, habilidades y actitudes tales como la aplicación de una metodología de diseño, la creatividad, el manejo de herramientas, la aplicación de tarjetas microcontroladoras, la tolerancia y la responsabilidad al trabajar de forma colaborativa, entre otros.

Con respecto a la metodología de diseño, se procura que los alumnos aborden la ideación de su prototipo con base en el desarrollo de cinco etapas conocidas como: 1 Planteamiento del problema; 2 Análisis del problema; 3 Búsqueda de soluciones; 4 Selección de la mejor solución; 5 Especificación de la solución; y su posterior construcción y puesta en marcha. La aplicación de esta metodología pretende que los alumnos se den cuenta que no es conveniente desarrollar la primer idea que se les viene a la cabeza, sino que, después de una búsqueda de toda la información posible sobre el objetivo que se desea alcanzar, se ideen diversas soluciones de las cuales pueda escoger la mejor. La explicación de estas etapas se puede consultar en el libro *Introducción a la ingeniería y al diseño de ingeniería*, de Krick, Limusa, 1998.

Con respecto a la construcción de los prototipos, por lo regular una de las partes más importantes que conviene poner atención es en la mecánica. Por lo regular los alumnos sólo tienen conocimiento de materiales de fácil adquisición, como cartón y madera, y de procesos de ensamble basados en pegamento, cinta adhesiva, clavos, y en el mejor de los casos silicón, velcro o cinchos.

Para que un prototipo sea robusto, se debe pensar en materiales más adecuados, tales como láminas y placas de aluminio o de Nylamid; en caso de mecanismos giratorios pensar en ejes, preferentemente de acero, conectados a los ejes de los motores que los accionan con coples, que pueden ser fabricados con barra cilíndrica de aluminio, y para facilitar el giro de los ejes incluir rodamientos en sus extremos, que estén alojados firmemente en una estructura robusta. Para la fijación de los diversos elementos mecánicos lo más conveniente es el empleo de tornillos y tuercas.

Con respecto a los motores, en caso de requerir un buen par, una solución relativamente económica es el motor de un limpiaparabrisas, que cuesta alrededor de \$300.00 M. N., e incluso podría buscarse en *desbuesaderos*, en lugar de usar moto-reductores comerciales que son costosos y difíciles de conseguir. Para el control de este tipo de motores, se sugiere consultar el artículo “La venganza del Blinki Wonder: del mundo analógico al inframundo digital ... y alrevés”, boletines 7 y 9 de UNAMente Robótica, a los que puede accederse en la liga <http://dcb.fi-c.unam.mx/Publicaciones/UNAMenteRobotica/>.

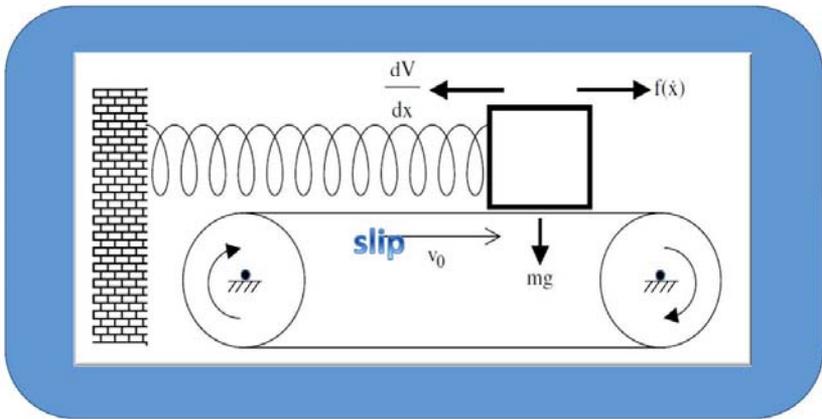
Para la ideación y construcción de prototipos físicos, se ofrece asesoría y préstamo de algunas herramientas en el Taller de Robótica, ubicado en la planta baja del edificio J de la DCB, en su extremo norte.

*Yukihiko Minami Koyama*  
*Profesor de carrera de la DCB*



# CONFERENCIA

## Proyecto *Stick - slip*



Impartida por:

**Dr. Francisco Antonio Godínez Rojano**

**Proyecto PE109415**

Aplicación del aprendizaje basado en problemas y el colaborativo para potenciar el aprendizaje de los alumnos de ciencias básicas

**Auditorio Sotero Prieto**  
**Viernes 15 de abril de 2016**  
**13:00 horas**

Responsable: Alfredo Arenas G. [unamente.robotica@gmail.com](mailto:unamente.robotica@gmail.com)  
<http://dcb.fi-c.unam.mx/Publicaciones/UNAMenteRobotica>