

B o l e t í n UNAMente Robótica



Año 4 N° 11 Publicación Bimestral Septiembre de 2016

PRESENTACIÓN

La aplicación de los conceptos de las asignaturas de Ciencias Básicas, ha sido una preocupación para los profesores que las impartimos, y es también una de las muchas inquietudes (por supuesto válida) de nuestros alumnos *¿en dónde vamos a aplicar lo que estamos estudiando?* Por esta razón, varios profesores decidimos incorporar dentro de nuestras asignaturas la realización de proyectos por parte de nuestros alumnos y, empleando lo que se conoce como Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), hemos realizado ya varios proyectos en distintas asignaturas, con el invaluable apoyo del Taller de Robótica, de tal forma que los alumnos aplican lo que aprenden en ellas en proyectos, algunos pequeños y otros van cobrando mayor importancia, de tal forma que inclusive abarcan un mayor número de asignaturas.

Tal es el caso del proyecto que se denominó ***Absorbedor magnético de vibraciones de tipo pasivo***, que involucra a Ecuaciones Diferenciales, Cinemática y Dinámica y Electricidad y Magnetismo. En este boletín encontrarás información que te puede ser útil, si es que vas a desarrollar el proyecto, o bien, conocerás lo que van a realizar algunos de tus compañeros que cursan una de estas asignaturas. En este proyecto estamos trabajando, en mayor o menor medida, varios profesores que participamos en un programa institucional denominado PAPIME por las siglas de *Programa de Apoyo a Proyectos para la Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza*, y del cual se desprende el proyecto PE109415 *Aplicación del aprendizaje basado en problemas y el colaborativo para potenciar el aprendizaje de los alumnos de Ciencias Básicas*, con el cual se apoya a los profesores y alumnos que realizarán el absorbedor. Vale la pena mencionar que los profesores que propusieron el proyecto no pertenecen al PAPIME, pero se cuenta con su entusiasta participación para el desarrollo del mismo.

Esperamos que una gran cantidad de alumnos, integrados en varios equipos de cada uno de los grupos, aborde el diseño y la fabricación del prototipo de este dispositivo electromecánico, y que se hagan acreedores a participar en la gran final el martes 15 de noviembre del año en curso, en la que competirá el mejor equipo de cada grupo en el Auditorio Sotero Prieto de la DCB, y en la que podrán obtener atractivos premios si son ganadores de alguno de los tres primeros lugares.

Alfredo Arenas González
Profesor de la Facultad de Ingeniería

ABSORBEDOR MAGNÉTICO DE VIBRACIONES

Introducción

Los efectos de las vibraciones mecánicas sobre un sistema pueden ser desfavorables para su buen funcionamiento; tales efectos pueden ir desde una simple incomodidad hasta el colapso del sistema. En muchos fenómenos de ingeniería se presentan problemas con las vibraciones mecánicas como son: el movimiento de los cables de una línea de transmisión eléctrica, el movimiento de puentes y edificios debido a sismos, las vibraciones de máquinas rotatorias, etc. Algunos de los efectos negativos asociados a las vibraciones pueden atenuarse diseñando sistemas absorbedores de vibración pasivos o activos. En esta propuesta de proyecto de trabajo se requiere que los alumnos desarrollen un prototipo de un absorbedor dinámico de vibraciones de carácter magnético y de tipo pasivo. El desempeño del absorbedor se probará midiendo experimentalmente su capacidad para atenuar las vibraciones de una estructura denominada sistema principal constituido por placas (masas) y barras flexibles (Figura 1.a). La respuesta dinámica del sistema principal a una excitación oscilatoria con y sin el absorbedor deberá ser simulada matemáticamente y se deberán realizar comparaciones con las mediciones experimentales.

Los objetivos principales que se persiguen en este proyecto son: que el alumno interrelacione conocimientos de las diferentes asignaturas de las carreras de ingeniería en la resolución de un problema físico al aplicar conceptos físico-matemáticos con ayuda de las tecnologías de cómputo y/o electrónica.

Para lograr los objetivos principales se proponen los siguientes objetivos en el desarrollo del proyecto: i) fabricar un prototipo que recree adecuadamente el fenómeno de estudio; ii) resolver numérica o analíticamente un modelo matemático (constituido por ecuaciones diferenciales, y sus correspondientes condiciones iniciales y/o de frontera) que presumiblemente describa el fenómeno de estudio y que se encuentre planteado en la literatura especializada; iii) realizar una comparación “cualitativa” entre los comportamientos experimental y teórico-numérico del prototipo; iv) incentivar el trabajo en equipo fuera del aula; v) motivar la investigación autodidacta; vi) incentivar el uso de tecnologías y herramientas de fácil disponibilidad; y vii) asociar el proceso estudiado con otros fenómenos similares pertenecientes a diversas áreas del conocimiento.

El desarrollo de proyectos fomenta la colaboración entre pares, incentiva la iniciativa y creatividad, mejora el proceso enseñanza-aprendizaje de conceptos físico-matemáticos que se imparten en diferentes asignaturas como Ecuaciones Diferenciales, Electricidad y Magnetismo, Cinemática y Dinámica, Mecánica, además de interrelacionar conocimientos de las distintas carreras de Ingeniería de la Facultad.

Descripción

El absorbedor magnético a desarrollar consta fundamentalmente de un imán permanente dentro de un tubo de material conductor del calor y la electricidad. El movimiento relativo del imán (campo magnético) dentro del tubo produce corrientes

de Eddy que por un lado amortiguan la traslación del imán, y por otro lado, producen el calentamiento del tubo disipando energía. Para entender mejor este fenómeno, aconsejamos ver videos en los que se observa la caída de un imán permanente a través de un tubo de cobre, referencias [1], [15] y [16].

Otra posibilidad interesante para desarrollar el absorbedor magnético consiste en usar imanes permanentes y barras de perfil rectangular de material conductor de la electricidad. Experimentos sencillos muestran el efecto de frenado de los imanes al desplazarse sobre rampas inclinadas o al caer entre placas rectangulares de aluminio. Para entender mejor esta idea, se recomienda ver el video de la referencia [2].

El desempeño del absorbedor se prueba montándolo al sistema principal compuesto por dos placas o masas (masa de la base M_0 y masa principal M_1) y barras de material flexible como se representa de manera esquemática en la Figura 1.a. A su vez, la masa superior o absorbedor magnético, M_2 , puede estar sujeta mediante barras unidas a la masa principal, o bien, puede estar directamente acoplada a ella. El resultado es una estructura con la masa de la base, y la masa principal más la del absorbedor, como se aprecia en la Figura 1.b; el movimiento vibratorio de este conjunto se puede lograr haciendo oscilar la base de la estructura, la masa M_0 .

Modelado matemático

Tanto el sistema principal como el absorbedor pueden ser representados por un arreglo de elementos mecánicos: que absorben y restituyen energía como los resortes (barras flexibles), que disipan energía como los amortiguadores (la disipación interna inherente al material de las barras flexibles, la atenuación del movimiento del imán dentro del tubo que se puede modelar como un amortiguador viscoso), y que almacenan energía cinética como las masas (masas: base, principal y absorbedor; así como las masas del imán y del tubo). Esta representación con elementos mecánicos es útil para obtener un modelo matemático representado por un sistema de ecuaciones diferenciales sujeto a condiciones iniciales. Puede consultar las referencias [4], [5] y [6] para una mejor comprensión del modelo análogo.

Para modelar el efecto de frenado en el imán debido a las corrientes de Eddy, se puede simular suponiendo una fuerza de frenado directamente proporcional a la velocidad, como si se tratara de disipación viscosa como se plantea en la referencia [3].

Las referencias [7], [8] y [9] son artículos de investigación que describen el fenómeno.

Para la medición de las aceleraciones del sistema principal (M_1) de la estructura, se sugiere el uso de acelerómetros digitales conectados a un microcontrolador Arduino, o en su defecto, el uso de cámaras de alta velocidad que permitan adquirir videos de al menos 240 cuadros por segundo para registrar los desplazamientos de la estructura. El movimiento del o los cuerpos (o puntos) de interés se puede obtener mediante el procesamiento digital de video con el uso de software especializado como Tracker (<http://physlets.org/tracker/>) o Kinovea (<http://www.kinovea.org/>), softwares de acceso libre y de fácil uso.

Como ayuda adicional se incluyen videos descriptivos del fenómeno en estudio en [10] a [14] para el absorbedor de vibraciones y en [15] a [19] para el efecto magnético del absorbedor.

Etapas del proyecto

Etapa 1 Sistema principal. Entregar un modelo físico representado por una estructura hecha con una masa conectada con barras de material flexible. La estructura se acopla a una base con masa M_0 , que oscila a una determinada frecuencia, para medir las aceleraciones de la masa principal M_1 . La base vibratoria será proporcionada por los profesores.

Etapa 2 Absorbedor magnético. Acoplar sobre la masa principal (masa M_1) de la Etapa 1, el absorbedor de tipo magnético (M_2) que provoque una reducción en las aceleraciones de la estructura.

Etapa 3 Optimización. Reducir al máximo las aceleraciones de la masa M_1 de la masa principal, es decir, optimar el desempeño del absorbedor. Esto implica: rediseñar el absorbedor probando nuevas configuraciones, dimensiones y/o materiales, probar distintas localizaciones del absorbedor, entre algunas otras ideas.

Etapa 4 Modelo matemático. Modelar matemáticamente el prototipo físico con y sin el absorbedor de vibraciones. Los resultados teóricos deben ser comparados con las mediciones experimentales de la dinámica de la estructura.

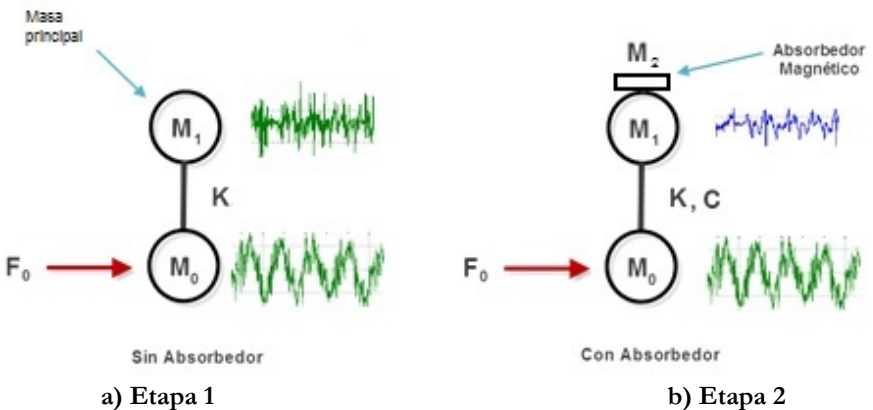


Figura 1. Modelo esquemático del sistema principal sin y con absorbedor.

Documentos que pueden ayudar para una mejor comprensión del fenómeno físico

- [1] <https://www.youtube.com/watch?v=JN-A3RryOC8>.
- [2] <https://www.youtube.com/watch?v=gWhxDqY45YI>.
- [3] <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/induccin/foucault1/foucault1.htm>.

- [4] Vázquez-León R., Vázquez-Lorenzana C. y Urrutia-Galicia J. L. (2004), *Síntesis de Absorbedores de Vibración Pasivos Aplicando el Método de Box*, Memorias del X Congreso Anual de la SOMIM, Querétaro, Qro. México, https://docs.google.com/file/d/0B5bo_rGPaKMfbFAyMEFKbTNWZG8/edit?pref=2&pli=1.
- [5] Disampro, Jorge M. (2006), *Absorbedores Dinámicos de Vibraciones*, Departamento de Ingeniería Aeronáutica, Facultad de Ingeniería. Catedra: Vibraciones. Universidad de la Plata, Argentina, <http://www.aero.ing.unlp.edu.ar/catedras/archivos/Absorbedores%20dinamicos%20e%20vibraciones.pdf>.
- [6] Pintor Borodía, J. M. (2006), *Tema 6. Elementos de Máquinas y Vibraciones*, Departamento de Ingeniería Mecánica Energética y de Materiales, Universidad Pública de Navarra, España, http://www.imem.unavarra.es/EMyV/pdfdoc/vib/vib_control.pdf.
- [7] Jae-Sung Bae, Jai-Hyuk Hwang, Dong-Gi Kwag, Jeanho Park, and Daniel J. Inman (2014), *Vibration Suppression of a Large Beam Structure Using Tuned Mass Damper and Eddy Current Damping*, <http://www.hindawi.com/journals/sv/2014/893914/>.
- [8] G Donoso, C L Ladera and P Martín (2009), *Magnet fall inside a conductive pipe: motion and the role of the pipe wall thickness*, <http://www.msc.univ-paris-diderot.fr/~phyexp/uploads/LaimantParesseux/Tube-Aimant2.pdf>.
- [9] G Donoso, C L Ladera and P Martín (2010), *Magnetically coupled magnet-spring Oscillators*, https://www.rose-ulman.edu/~moloney/Ph425/ProjectPDFs/0143-0807_31_3_002_magnetically_coupled_oscillators.pdf.

Videos de absorbedores de vibración

- [10] *What is a tuned mass damper?*, <https://youtu.be/f1U4SAgy60c>.
- [11] *Mass vibration absorber*, <https://youtu.be/bqjadkufes4>.
- [12] *Dynamic vibration absorber final proyect*, <https://youtu.be/KxEJ0xkLO7g>.
- [13] *Principle of tuned mass damper(TMD)*, <https://youtu.be/lhNjfNUOUo8>.
- [14] *Excentric mass dynamic vibratory absorber*, https://youtu.be/2_TjQoyV5RE.

Videos del principio magnético del absorbedor

- [15] *Eddy currents, magnetic braking and Lenz's law*, https://youtu.be/otu-KV3iH_I.
- [16] *Lenz's law at work*, <https://youtu.be/nqMnDfNWILM>.
- [17] *Magnetic damping-spinning wheel generator*, <https://youtu.be/1m2r8fh8JMA>.
- [18] *ECE470 Proyect Eddy current brake*, <https://youtu.be/mopfuVfeIhc>.
- [19] *Eddy currents and magnetic braking of a pendulum*, <https://youtu.be/MglUIiBy2IQ>.

*Francisco Antonio Godínez Rojano y César Vázquez Lorenzana
Profesores de la Facultad de Ingeniería*

FUNCIONAMIENTO DEL AMORTIGUADOR MAGNÉTICO

Para el prototipo del absorbedor magnético de vibraciones que diseñarán algunos alumnos de las asignaturas Ecuaciones Diferenciales, Electricidad y Magnetismo y Cinemática y Dinámica, entre sus elementos básicos se deberá considerar una parte que tendrá la función de amortiguar las vibraciones mecánicas no convenientes o completamente dañinas.

Para comprender la operación de este amortiguador magnético, se presenta el experimento que se puede realizar con un imán permanente con magnetismo elevado y un tubo de material conductor para las cargas eléctricas y para la energía en forma de calor.

Empecemos por explicar lo que sucede en una espira conductora que se mueve hacia el campo magnético no uniforme de un imán de forma cilíndrica o de barra, cuando el movimiento de la espira es aproximándose al polo norte del imán, como se muestra en la Figura 1.

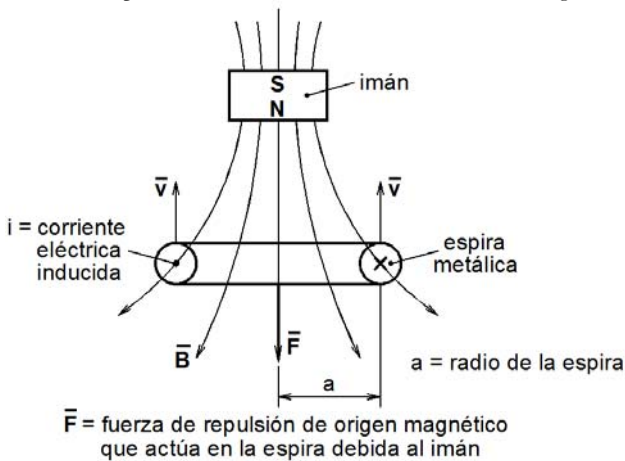


Figura 1 Una espira conductora se mueve con velocidad \vec{v} a lo largo del eje de simetría principal de un imán, en el campo magnético no uniforme \vec{B} del imán. Una fuerza de repulsión \vec{F} , y una corriente eléctrica inducida, i , aparecen en la espira.

Observamos que el plano que contiene a la espira es cruzada por un flujo magnético Φ asociado al campo magnético \vec{B} del imán. Dicho flujo se puede evaluar con la integral

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

donde $d\vec{S}$ es el vector diferencial de superficie al que atraviesan las líneas de flujo, y se tiene que \vec{B} y $d\vec{S}$ forman un ángulo α .

Al acercar la espira al imán, se provoca un aumento del flujo magnético a través de la espira y, por lo tanto, se induce una fuerza electromotriz \mathcal{E} en dicha espira que, al estar cerrada, permite la circulación de una corriente eléctrica inducida i .

Esta corriente a su vez genera un campo magnético que se opone a que el flujo magnético que cruza la espira aumente, esto de acuerdo con la ley de inducción de Faraday, que incluye el Principio de Lenz para la determinación correcta del sentido de la corriente, es decir:

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

en este caso, $N = 1$, ya que es una sola fuerza.

Esta fuerza electromotriz ε se puede expresar en función del campo eléctrico inducido \vec{E} en el interior de la espira, a través del cálculo de la circulación de \vec{E} en la circunferencia media de la espira, donde $d\vec{l}$ es la diferencial de longitud, es decir:

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Este campo eléctrico \vec{E} se produce por la variación del campo magnético en la espira, y la variación es consecuencia del movimiento de la espira, por lo tanto, se llega a que:

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$$

Si ahora analizamos el movimiento del imán dentro de un tubo conductor, por ejemplo de cobre o de aluminio, tendremos la situación mostrada en la Figura 2.

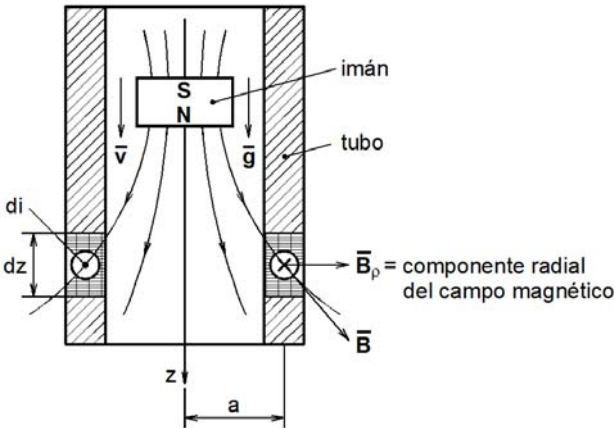


Figura 2 Corte de sección longitudinal de un imán que cae dentro de un tubo conductor. Una corriente d_i es inducida en el tubo debido a la caída del imán con una velocidad \vec{v} .

En este caso es el imán el que se mueve por el efecto gravitatorio, produciendo variaciones de flujo magnético a lo largo de su recorrido. En el tubo se pueden considerar elementos diferenciales que asemejen espiras, en las cuales se inducirán corrientes eléctricas que con su campo magnético presentarán una fuerza \vec{F} retardadora del movimiento del imán, es decir, opuesta a su movimiento a lo largo del eje z .

La fuerza electromotriz inducida ε se puede evaluar con la expresión de la circulación de \vec{E} , y con la sustitución de este campo eléctrico en función del campo magnético:

$$\varepsilon = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad \varepsilon = v B_{\rho} (2\pi a).$$

En esta última expresión, B_{ρ} representa la componente radial del campo magnético.

Se sabe que un conductor con corriente eléctrica i , y colocado dentro de un campo magnético \vec{B} , experimenta una fuerza de origen magnético dada por la expresión:

$$\vec{F} = i (\vec{l} \times \vec{B}).$$

Como en este caso el conductor está formado por las espiras de longitud diferencial dz , la componente axial de la fuerza, \vec{F}_z , que se opone al movimiento de la espira a lo largo del eje z , es

$$\vec{F}_z = i (\vec{l} \times \vec{B})_z \quad F_z = i (2\pi a) B_{\rho}.$$

Al dejar caer el imán dentro del tubo conductor, ocurre un fenómeno transitorio de aceleración constante, debida al efecto gravitatorio. Al moverse el imán dentro del tubo, se va presentando la fuerza \vec{F}_z opuesta al peso del imán, hasta que lo iguala en magnitud pero con dirección opuesta. Al alcanzarse esta situación, el imán alcanza una rapidez constante denominada rapidez terminal.

Al realizar un análisis más profundo y detallado, se llega a que la fuerza retardadora que se opone al peso del imán es proporcional a la velocidad que alcanza el imán, es decir:

$$\vec{F} \propto \vec{v}$$

y con la constante de proporcionalidad que se obtiene del análisis completo:

$$\vec{F} = k \vec{v};$$

k depende del momento dipolar magnético del imán, μ , de la conductividad del tubo, σ , del espesor de la pared del tubo, e , del radio interior del tubo, a , y la constante $f = \frac{5\pi}{256}$; con base en los parámetros anteriores, la constante k es igual a:

$$k = \left(\frac{36\pi f \sigma e \mu^2}{a^4} \right).$$

Basado en el artículo de Donoso G., Ladera C. L., Martín P., *Magnet fall inside a conductive pipe: motion and the role of the pipe wall thickness*, European Journal of Physics, 30 (2009), pp. 855–869.

Gabriel Alejandro Jaramillo Morales
Profesor de carrera de la Facultad Ingeniería

MODELADO DEL ABSORBEDOR MAGNÉTICO DE VIBRACIONES

1 Introducción

El modelado matemático del comportamiento físico de un sistema dinámico tiene como premisas la descripción, simulación y verificación del comportamiento que tiene el sistema real en el medio que opera. El estudio matemático de su funcionamiento y de la predicción de resultados que muestra (gráficas de números, vectores, etc.) en función del tiempo, constituye, sin lugar a dudas, la obtención de una ecuación diferencial y la forma de expresar su solución.

El modelo físico que nos ocupa como proyecto a desarrollar en este semestre, correspondiente al diseño de un absorbedor magnético de vibraciones, contiene esta idea. Es decir, el propósito fundamental de este proyecto es diseñar y construir un modelo físico y obtener el modelo matemático de una ecuación diferencial, cuya solución describa, de la manera más aproximada, el comportamiento de las variables mecánicas de la posición y la velocidad de una masa que interactúa con otros elementos mecánicos y electromagnéticos.

2 Descripción de las partes del modelo completo

El modelo físico consta de dos partes esenciales, que se muestran en la Figura 1:

1) Una plataforma, donde se sujetan los elementos del modelo: la masa metálica que se quiere controlar, las dos varillas elásticas que sostienen a la masa y el imán que podría estar unido a un soporte; este imán permanente forma parte del sistema de amortiguamiento con la que se desea atenuar la vibración a la que se somete la masa metálica suspendida.

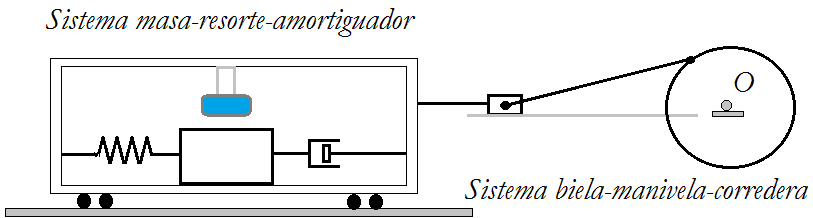


Figura 1 Sistema de amortiguamiento magnético unido al mecanismo biela-manivela-corredera.

2) Una mesa vibradora que proporciona un movimiento forzado lineal, de vaivén horizontal, y que puede aproximarse a una excitación sinusoidal externa por medio de un mecanismo que podría ser del tipo biela-manivela-corredera, o BMC. La descripción de estos dos sistemas acoplados se describe a continuación.

2.1 Descripción dinámica del movimiento del amortiguador magnético

Este modelo dinámico se representa por medio de un sistema masa–resorte–amortiguador, o MRA, tal como se muestra en la Figura 1. Puede observarse en esta figura que a este sistema ya se le acopló el mecanismo BMC, por lo que el movimiento forzado producido por este mecanismo se transmite al carrito en donde se encuentra localizado el sistema MRA. El carrito constituye la plataforma vibratoria que va a poner en movimiento, de manera indirecta, a la masa del sistema. En la Figura 2 se muestra el mismo sistema, pero sin el amortiguador magnético.

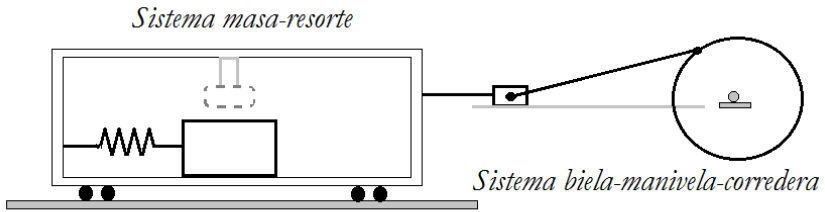


Figura 2 Sistema de amortiguamiento magnético sin la presencia del imán.

El diagrama de cuerpo libre, o DCL, de la masa del amortiguador se muestra en la Figura 3.

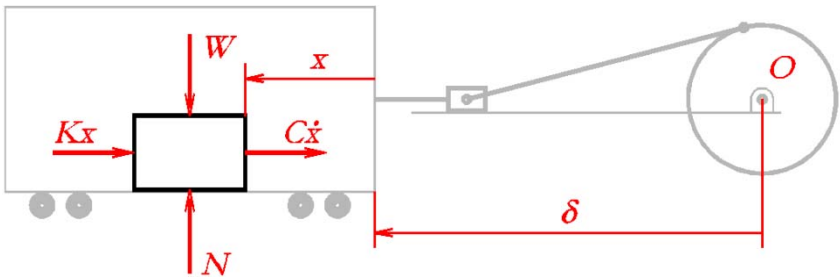


Figura 3 DCL de la masa del amortiguador magnético.

Las fuerzas que actúan sobre la masa son las siguientes: W es el peso de la masa, $f_k = Kx$, es la acción de las varillas elásticas sobre la masa. Las varillas están representadas por un equivalente de dos resortes lineales de constante K , en donde la fuerza es directamente proporcional a la deformación que experimentan; como las dos varillas al deformarse, experimentan el mismo desplazamiento angular, su equivalente lineal corresponde a dos resortes en paralelo que experimentan de manera análoga la misma deformación lineal. La acción de las fuerzas de origen electromagnético, que dan origen a la fuerza que impide que la masa vibre respecto a la plataforma, se representa por la acción de una fuerza amortiguadora lineal $f_c = C\dot{x}$, la cual es directamente proporcional a la velocidad de la mesa respecto a la plataforma.

Al aplicar la segunda ley de Newton, del DCL anterior se tiene

$$\sum F_x = -Kx - C\dot{x} \quad -Kx - C\dot{x} = M\ddot{x}$$

la aceleración de la masa, \ddot{x} , se debe medir con respecto a un marco de referencia fijo, es decir, respecto a un sistema donde se localizan los puntos fijos del sistema MRA, por ejemplo el eje del cilindro que pasa por O, en donde δ representa la posición del carrito con respecto al mencionado marco de referencia fijo, y cuya segunda derivada $\ddot{\delta} = -r\omega^2 \cos(\omega t)$, expresión 7, se desarrolla en el apartado 2.2:

$$-Kx - C\dot{x} = M \frac{d^2(x+\delta)}{dt^2} \quad -Kx - C\dot{x} = M (\ddot{x} + \ddot{\delta})$$

$$-Kx - C\dot{x} = M (\ddot{x} - r\omega^2 \cos(\omega t)).$$

La ecuación queda:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -Mr\omega^2 \cos(\omega t).$$

La ecuación característica para obtener la solución de la parte homogénea es:

$$\lambda^2 + \left(\frac{C}{M}\right)\lambda + \left(\frac{K}{M}\right) = 0$$

cuyas raíces son:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{C}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \frac{K}{M}}$$

En virtud de que la respuesta del sistema mecánico debe ser del tipo *subamortiguado*, es decir, una *ecuación diferencial homogénea* con valores característicos complejos, tal que:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i \omega_H$$

para lo cual $\frac{K}{M} > \left(\frac{C}{2M}\right)^2$.

Entonces, la expresión matemática del radical del discriminante debe corresponder a un número imaginario, es decir, una cantidad imaginaria de la forma $i \sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{C}{2M}\right)^2}$, donde $\sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{C}{2M}\right)^2}$ es un número real.

La solución de la homogénea está dada por la expresión matemática:

$$x_H = e^{-\alpha t} [C_1 \cos(\omega_H t) + C_2 \sin(\omega_H t)]$$

donde $\omega_H = \sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{C}{2M}\right)^2}$

cuyo valor se le conoce como la frecuencia natural del sistema. Como su nombre lo indica, es la frecuencia que tiene el sistema MRA y, como puede observarse, depende exclusivamente de sus parámetros que le son naturales al sistema, es decir, M, C y K.

El término $\alpha = \frac{C}{2M}$ corresponde al decaimiento exponencial que tiene la vibración. Este término depende de la constante B asociada a la fuerza de origen electromagnético y de la masa M del sistema.

La solución particular de la ecuación diferencial, se obtiene de la combinación lineal que da origen a la expresión $F(t) = -Mr\omega^2 \cos(\omega t)$, es decir, dicha solución particular es:

$$x_p = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t).$$

Luego, a partir de esta función, en términos de los coeficientes A y B (hasta este momento indeterminados), se pueden evaluar dichas constantes para obtener la siguiente solución particular:

$$x_p = \left[\frac{M^2 r \omega^2}{\omega^2 (C^2 - 2KM + M^2 \omega^2) + K^2} \right] [(M\omega^2 - K) \sin(\omega t) + C\omega \cos(\omega t)].$$

Por lo tanto, la solución general estará dada por la suma de la homogénea y la particular:

$$x = x_H + x_p$$

$$x = e^{-\alpha t} [C_1 \cos(\omega_H t) + C_2 \sin(\omega_H t)] + \left[\frac{M^2 r \omega^2}{\omega^2 (C^2 - 2KM + M^2 \omega^2) + K^2} \right] [(M\omega^2 - K) \sin(\omega t) + C\omega \cos(\omega t)].$$

La derivada de la solución es:

$$\dot{x} = -e^{-\alpha t} [(\omega_H C_1 + \alpha C_2) \sin(\omega_H t) + (\alpha C_1 - \omega_H C_2) \cos(\omega_H t)] + \left[\frac{M^2 r \omega}{C^2 + K^2 - 2KM + M^2 \omega^2} \right] [(M\omega^2 - K) \cos(\omega t) + C\omega \sin(\omega t)].$$

Dado que las condiciones iniciales para $t = 0$ son $x = x_0$ y $\dot{x} = v_0$, con base en ellas se pueden evaluar las constantes de integración C_1 y C_2 , y de esta forma resolver el modelo dinámico del amortiguamiento magnético.

2.2 Descripción cinemática del movimiento del mecanismo biela-manivela-corredera

El modelo del mecanismo BMC se muestra en la Figura 4.

Los tres elementos que lo componen son: la masa de la izquierda que debe tener un movimiento rectilíneo horizontal de vaivén (corredera), unida a la barra AB (biela) por medio de un pasador en el punto B; a su vez, esta barra está unida por medio de otro

pasador en el punto A a un cilindro (manivela), la cual se hace girar por medio de un motor, cuya velocidad angular puede regularse a través de un dispositivo electrónico de control.

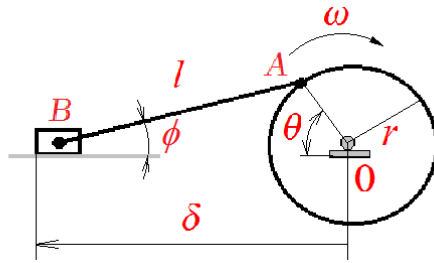


Figura 4 Modelo de biela–manivela–corredera, o BMC.

De esta manera, el movimiento de estos tres elementos: la corredera, la biela y la manivela se logra a partir de la interacción de tres movimientos distintos pero ligados por medio de pasadores O, A y B, teniendo como elemento motriz al cilindro (manivela).

La expresión que determina la posición de la corredera, punto B, se determina por medio de la suma de la longitud correspondiente a las proyecciones de la barra y del radio del cilindro sobre la horizontal.

$$\delta = l \cos \phi + r \cos \theta. \tag{1}$$

A partir de esta ecuación se pueden determinar las dos posiciones extremas, izquierda y derecha: cuando $\phi = 0$ y $\theta = 0$, se tiene que $\delta = l + r$, posición del extremo izquierdo que puede considerarse como posición inicial; y cuando $\theta = \pi$ y $\phi = 0$, entonces $\delta = l - r$, que corresponde a la posición extrema del lado derecho. De este resultado se debe tener en cuenta para el diseño de este mecanismo que $l > 2 r$, para que pueda darse el movimiento circular del cilindro de manera continua sin que el mecanismo se trabase.

De la Figura 4, se puede observar que el punto A tiene una altura al pie de la vertical:

$$h = l \sin \phi \qquad h = r \sin \theta \qquad l \sin \phi = r \sin \theta \tag{2}$$

de donde:

$$\sin \phi = \frac{r}{l} \sin \theta. \tag{3}$$

Al aplicar la identidad trigonométrica $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ al término $l \cos \phi$ de la ecuación 1:

$$l \cos \phi = l \sqrt{1 - \sin^2 \phi} \tag{4}$$

y al sustituir la expresión 3 en 4, queda:

$$l \cos \phi = l \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin^2 \theta}.$$

Es conveniente realizar la siguiente consideración de diseño, con el objeto de poder efectuar la siguiente simplificación;

$$\text{si } l \ll r, \text{ se puede considerar que } \frac{r}{l} \approx 0.$$

De esta forma se tiene que:

$$l \cos \phi = l.$$

Y al sustituir esta última expresión en 1:

$$\delta = l + r \cos \theta.$$

Al derivar, se tiene la rapidez de la corredera:

$$\dot{\delta} = \frac{d\delta}{dt} \quad \dot{\delta} = r \left(\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right) \quad \dot{\delta} = r \omega \sin \theta \quad (5)$$

y la segunda derivada, que corresponde a la aceleración lineal de dicha corredera queda:

$$\ddot{\delta} = \frac{d^2\delta}{dt^2} \quad \ddot{\delta} = -r \omega^2 \cos \theta. \quad (6)$$

Las ecuaciones 5 y 6, son las propiedades cinemáticas que transmite el mecanismo BMC a la plataforma en donde está montado el sistema del amortiguador magnético, y de esta forma es como se transmite el movimiento vibratorio a la masa. Si este movimiento se realiza con variación del ángulo θ con respecto al tiempo constante, es decir con rapidez angular $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ constante, se tiene que $\theta = \omega t$, las expresiones anteriores se pueden escribir, de esta forma, en función del tiempo:

$$\dot{\delta} = r \omega \sin(\omega t) \quad \ddot{\delta} = -r \omega^2 \cos(\omega t). \quad (7)$$

Hugo Germán Serrano Miranda
Profesor de carrera de la Facultad de Ingeniería

UNA VISTA RÁPIDA AL ANÁLISIS DINÁMICO ESTRUCTURAL Y SU RELACIÓN CON LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

El análisis estructural se encarga de conocer la respuesta que presenta un edificio al estar sometido a cargas. Un edificio en funcionamiento estará sujeto a diversas sollicitaciones o cargas, y las respuestas tienen que ver con las deformaciones, esfuerzos y desplazamientos de los elementos que conforman al edificio. Por ahora bastará saber que existen dos tipos fundamentales: las cargas estáticas y las dinámicas.

El análisis dinámico es más complejo que el estático debido a la naturaleza variable a lo largo del tiempo, tanto de la carga aplicada como de la respuesta de los elementos, lo que provoca que la solución al problema dinámico no tenga una solución única, como lo es en el caso estático. El objetivo fundamental del análisis dinámico estructural es determinar el desplazamiento, a lo largo del tiempo, que presenta una estructura al estar sujeta a una carga que varía a lo largo del tiempo.

Para ilustrar el proceso de modelado del problema dinámico de un edificio, consideremos el caso de una estructura de un nivel. La losa del edificio se idealizará como una viga simplemente apoyada. Debido a que su masa está continuamente distribuida a lo largo de su longitud, los desplazamientos y las aceleraciones deberían ser definidos para cada partícula que constituye a la viga. La segunda simplificación que haremos será concentrar a toda la masa de la viga en el punto medio de su longitud.

Las expresiones matemáticas que definen los desplazamientos se denominan **ecuaciones de movimiento** de la estructura. Un método para formular estas ecuaciones es el llamado *Principio de D'Alembert*, basado en la formulación de la segunda ley de Newton. Si consideramos que $\overline{P(t)}$ es el vector fuerza aplicado y $\overline{r(t)}$ el vector de posición de la partícula de masa m constante, la formulación quedaría:

$$\overline{P(t)} = m \frac{d^2\overline{r(t)}}{dt^2}, \quad \text{es decir,} \quad \overline{P(t)} - m \frac{d^2\overline{r(t)}}{dt^2} = 0$$

El término $m \frac{d^2\overline{r(t)}}{dt^2}$ recibe el nombre de fuerza inercial. Esta formulación permite expresar a las ecuaciones de movimiento como ecuaciones de equilibrio dinámico, en donde la fuerza $\overline{P(t)}$ es un vector en el que se incluyen muchos tipos de fuerzas actuando sobre la masa: restricciones elásticas que se oponen al movimiento, fuerzas viscosas que se resisten a velocidades y cargas externas independientes.

Con base en lo anterior, podemos afirmar que en el caso estático las fuerzas y momentos internos, así como la forma final del elemento deformado dependen exclusivamente de la fuerza aplicada y pueden ser calculados mediante los principios de la estática. En cambio, en el caso dinámico, las fuerzas y momentos internos deben equilibrar tanto a las fuerzas externas como a las fuerzas inerciales que resultan de las aceleraciones del elemento estructural estudiado.

Entonces, el análisis de un sistema dinámico es más complicado porque las fuerzas inerciales son producidas por los desplazamientos de la estructura, que varían con el tiempo, los cuales a su vez son influenciados por las magnitudes de las fuerzas inerciales. Este círculo cerrado de causa y efecto puede ser abordado directamente si formulamos el problema en términos de ecuaciones diferenciales.

Referencia

Clough, R.W. and Penzien J. (1993), *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill International Edition, 2nd Edition, Singapore.

Lorenzo Octavio Miranda Cordero
Profesor de carrera de la Facultad de Ingeniería

Conferencia

Modelado matemático de un absorbedor magnético de vibraciones



Impartida por

Dr. Gerardo René Espinosa Pérez

Auditorio Sotero Prieto

Lunes 19 de Septiembre de 2016

13: 30 horas

Proyecto PE109415

Aplicación del aprendizaje basado en problemas
y el colaborativo para potenciar el aprendizaje
de los alumnos de Ciencias Básicas

**Responsable: Alfredo Arenas G. unamente.robotica@gmail.com
<http://dcb.fi-c.unam.mx/Publicaciones/UNAMenteRobotica>**