GUÍA DE ESTUDIOS PARA PREPARAR EXAMEN EXTRAORDINARIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Ing. Érik Castañeda de Isla Puga

PRÓLOGO

La actividad más importante en la Facultad de Ingeniería es la preparación de sus alumnos. Los primeros semestres representan un reto para nuestros estudiantes; es una etapa de cambios en sus estrategias de estudio para alcanzar los aprendizajes en el área de las Ciencias Fundamentales. El material de esta obra corresponde a la asignatura de Cálculo Diferencial. El profesor de Carrera de Tiempo Completo Érik Castañeda de Isla Puga acorde con la Misión de la Facultad, elaboró la presente guía con el objetivo de apoyar a los alumnos que desean acreditar la asignatura a través de un Examen Extraordinario. La obra contiene además de ejercicios resueltos, una serie de recomendaciones en cuanto a tiempo de estudio, manera de prepararse para un examen, conceptos tratados, entre otros.

Esperamos que sea de utilidad para la comunidad estudiantil y de manera adicional para profesores y asesores de la asignatura, así como para quienquiera que se interese en el estudio del Cálculo Diferencial.

Ing. Juan Ursul Solanes
Jefe de la División de Ciencias Básicas

GUÍA DE ESTUDIOS PARA PREPARAR EXAMEN EXTRAORDINARIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL

OBJETIVO.- El estudiante será capaz de presentar con éxito un examen extraordinario de la asignatura **Cálculo Diferencial,** correspondiente a los planes de estudio de la Facultad de Ingeniería.

GENERALIDADES.- La preparación de un examen extraordinario, de cualquier asignatura, representa un esfuerzo importante por parte del sustentante. Existen diferentes mitos sobre este tipo de exámenes que propician temores o comportamientos inadecuados para alcanzar el logro buscado. El más difundido trata de su grado de dificultad. Es lógico que un examen extraordinario tenga que abarcar, necesariamente, un extenso dominio del conocimiento. En cualquier otro tipo de examen, sea parcial o final; el profesor tiene otros elementos que permiten la correcta evaluación del alumno; mientras que los estudiantes que recurren a un extraordinario, ni siquiera tienen que ser conocidos por el profesor y el examen constituye el único elemento de juicio. Por ello, aunque es imposible preguntar absolutamente todo un curso, el cuestionario tiene que intentar abarcar la mayor parte de los conceptos relevantes de él. Esto de ninguna manera significa que los reactivos empleados se propongan deliberadamente con la intención de que sean **difíciles.** Por otra parte, también resulta natural pensar que el estudiante que utiliza este recurso **extraordinario**, en ocasiones lo hace después de un tiempo considerable de haber cursado la asignatura. Aunado a esto, en lo particular Cálculo Diferencial requiere para su comprensión de una abstracción importante, que en muchas ocasiones el alumno que ingresa apenas del bachillerato no ha alcanzado.
Ahora bien, con el objetivo de resolver estas dificultades, se propone lo siguiente:
Para el problema evocado en primer lugar, dado que la evaluación intenta cubrir todo el curso, el alumno que presentará un extraordinario debe organizar sus estudios y su tiempo para alcanzar un nivel adecuado de conocimientos. Es absurdo pensar que un examen extraordinario pueda prepararse con tan solo unos cuantos días de estudio. El tiempo de preparación debe estar en función de la parte del curso que se haya olvidado o que requiera estudio más profundo. Yo sugiero que el estudiante haga personalmente un diagnóstico de su situación. Para ello debe conseguir un programa vigente de Cálculo Diferencial. En él, con tres marcadores de diferentes colores, elegidos por él mismo, señalar los conceptos que requieren muy poca o nula atención. Con otro color aquellos temas que con un repaso serio y profundo el mismo estudiante pueda dominar y, por último, con el otro color aquellos conceptos para los que necesite la asesoría de un profesor o de algún otro estudiante que lo pueda ayudar. Con esto el color dominante indicará las acciones a seguir, así como el tiempo requerido para la adecuada preparación del examen.
Es aconsejable que se comprenda que no basta con resolver ejercicios. Es absolutamente indispensable el conocimiento de la teoría. Sobre todo en una asignatura en la que se necesita alto grado de abstracción e imaginación, resulta imposible aprender solamente

ejercicios tipo y con ello pretender tener éxito. Es sabido que un mismo enunciado con datos diferentes puede conducir a un procedimiento de resolución totalmente diferente.

¿QUÉ ES UN EXAMEN? La pregunta parece ociosa, sobre todo dirigida a una persona que está preparándose para presentar un extraordinario; sin embargo, mientras más claro se tenga el concepto de examen extraordinario, más cerca se puede estar de presentarlo con éxito. Pues bien, entendamos por examen un instrumento de evaluación que le va a permitir al estudiante demostrar su conocimiento sobre la materia y a los sinodales la corroboración de dicho conocimiento. Dado que como se dijo, el examen extraordinario es el único elemento de evaluación, es de suma importancia que el sustentante sea ordenado y claro al responder el cuestionario. Un hecho innegable es que un examen desordenado y sucio es más difícil de calificar que uno limpio y ordenado. Cuando los sinodales deben calificar un número considerable de exámenes y en muy poco tiempo, si se encuentran ante un examen poco comprensible, el tiempo de investigar si la respuesta está correcta en algún porcentaje se reduce en comparación con un examen claro y ordenado. En este último caso, el sinodal puede percatarse con relativa facilidad en dónde se encuentran los errores y si éstos son conceptuales u operacionales. De manera que el estudiante debe estar consciente de que un examen es un documento muy importante, tan lo es que con él puede o no obtenerse una calificación aprobatoria.

LA PREPARACIÓN DE UN EXAMEN EXTRAORDINARIO.- Es una práctica frecuente entre el alumnado, que la preparación de un examen extraordinario consista exclusivamente en la obtención de un conjunto de *exámenes atrasados*, unos cuantos días antes de la realización del suyo y por la premura, ni siquiera resuelven todos los reactivos de los exámenes conseguidos. Si nos ponemos a razonar un poco, la probabilidad de que un reactivo contenido en los atrasados se repita en el que se va a presentar es bajísima, podría afirmarse que es nula. Por otra parte, la resolución de reactivos atrasados como único método de estudio, tiende a la mecanización y eso no es deseable, sobre todo en materias como Cálculo Diferencial.

Por esto, la preparación de un examen extraordinario puede iniciarse con lo que señalé al inicio de esta guía; es decir, un diagnóstico serio y personal de la situación del estudiante con respecto a la materia. Posteriormente elaborar un plan de acción con tiempos razonables para adquirir o recordar los conceptos que están olvidados o nunca han sido aprendidos. Auxiliarse de un buen material bibliográfico y del recurso de la asesoría y solamente como la parte final de la preparación está la resolución de exámenes atrasados, ¿Por qué no? No lo rechazo pero no debe ser eso el método de preparación. En la utilización de los libros, les recomiendo que sigan esta estrategia: una vez estudiado y adquirido un concepto, para evaluarlo, resuelvan los ejercicios que el libro contenga como ejemplos que incluyen la resolución, pero en un principio lean exclusivamente el enunciado, tapando con una hoja la resolución. Intenten la resolución y puedan o no con el ejercicio, una vez razonado descubran la resolución del libro y compárenla con la suya, o bien si no lograron resolverlo, vean cómo lo resolvió el autor. En cualquiera de los dos casos, el hecho de haberlo intentado antes y ver la solución del autor va a servir para ir afirmando el concepto que se está estudiando. Posteriormente ataquen los ejercicios propuestos, pero elijan aquellos que traen la solución al final del libro. Intenten llegar a esa solución. Para finalizar, aborden ahora los ejercicios propuestos que no tienen la solución. Siempre habrá una forma de comprobar si están en lo correcto.

Todo este procedimiento que sugiero les va dando confianza en lo que se hace. ¿Cuántas veces un alumno reprueba por no haber confiado en lo que hizo? ¿No es cierto que en ocasiones al salir del examen nos damos de topes porque borramos algo que estaba bien? Eso refleja falta de confianza en nuestros conocimientos.

LA UTILIZACIÓN DE ESTA GUÍA.- La guía que tienen en sus manos ha sido elaborada con la idea de que no solamente sea un puñado de ejercicios. En otras palabras, no se trata de un cuadernillo de ejercicios. Se trata de que tengan un instrumento que les permita preparar con éxito la presentación de un examen de Cálculo Diferencial. El empleo de esta guía puede ser diferente para cada estudiante. Recordemos que no existe "*el método de estudio*" Cada persona, de acuerdo con sus características personales, puede tener su propio método.

Como podrán observar, la guía contiene la presentación de ella, con un conjunto de descripciones y recomendaciones, así como ejercicios de la asignatura. La mayor parte de estos ejercicios son de mi invención. Otros de ellos formaron parte de algún examen colegiado o departamental, entre éstos se cuenta con algunos en los que yo mismo participé en su elaboración, y también he elegido algunos de las series de ejercicios que semestre a semestre propone el Departamento de Cálculo Diferencial. La elaboración o selección de ejercicios en ningún caso tuvo como criterio para su proposición el grado de dificultad. En realidad, este grado de dificultad es percibido de manera diferente por cada persona. Depende del conocimiento del concepto y del dominio de los antecedentes necesarios para la resolución del ejercicio. La selección de los ejercicios se basó principalmente en los conceptos por evaluar. De manera que, dada la imposibilidad de preguntar todo el material de un curso, se tenga una cantidad de ejercicios que abarquen la evaluación de los conceptos más importantes o más significativos de la asignatura. En cada ejercicio está definido el concepto principal por evaluar; así como los conceptos secundarios o antecedentes. De manera que si el usuario de esta guía selecciona algún ejercicio y lo logra resolver, esto puede darle la idea de que el concepto principal por evaluar ha sido comprendido o dominado, pero si no logra llegar a su resolución, esto le señalará que debe estudiar más ese concepto y los antecedentes o los conceptos secundarios. Por ello, propongo dos formas de utilización de la guía, pero siempre dejando la libertad de que sea el propio estudiante quien decida cómo la va a emplear:

La primera forma consiste en elaborar, como ya mencioné, un diagnóstico del nivel de conocimiento de los conceptos de la materia. Una vez que se tenga este análisis, el alumno puede buscar los ejercicios que se refieran a los conceptos que él ha clasificado como de un amplio dominio. Si los resuelve con facilidad, esto significará que su diagnóstico fue correcto y que puede continuar con los conceptos que marcó que requieren de un estudio personal, quizás no tan profundo. Ahora recomiendo que proceda a ese estudio para, posteriormente, enfrentarse a los ejercicios que se relacionan con esos conceptos. Posteriormente deberá hacer frente a los conceptos que en su diagnóstico describió como aquellos que requieren de un estudio profundo, ayudado por un asesor o por la asistencia a un curso formal. Cuando haya estudiado con esa profundidad y crea haber comprendido esos conceptos, debe proceder a la resolución de los ejercicios correspondientes. En los tres

casos, como ya dije, recomiendo que el estudiante intente resolverlos sin ver la resolución que se presenta en la guía.
Otra forma de utilización de la guía puede ser con el estudio preliminar de los conceptos. Esto es ineludible. El estudio con el grado de profundidad señalado por el diagnóstico personal. Posteriormente, el estudiante puede seleccionar un ejercicio de cada bloque para formar un examen. Cada bloque contiene ejercicios de cada capítulo del programa vigente. La selección puede ser aleatoria o no. Si el estudiante pudo resolver exitosamente ese examen, puede proceder a la selección de otros ejercicios para formar otro examen. El número de exámenes que así puede resolver depende de cada estudiante y de la facilidad o dificultad que tenga para resolverlos. Mi recomendación es que no sean menos de cinco. Además puede ayudarlo en diagnosticar en dónde requiere repasar los conceptos de la asignatura o los conceptos antecedentes. Estoy consciente de que el programa de la asignatura puede cambiar. Es más, es deseable que los programas no permanezcan estáticos por mucho tiempo; sin embargo, la guía puede continuar siendo útil aunque los bloques de ejercicios ya no correspondieran a los temas del curso. De todas maneras los conceptos siempre serán vigentes y hasta la búsqueda de cuál concepto corresponde a los que se desea evaluar puede ayudar al estudiante a definir mejor las áreas del conocimiento que requieren su atención.

LA PRESENTACIÓN DE UN EXAMEN EXTRAORDINARIO.- El nombre mismo de este tipo de exámenes indica que debe tratarse de una situación de excepción. Lo ideal es que el estudiante logre el aprendizaje de una asignatura durante un curso normal y, como consecuencia de ello, la evaluación ordinaria del curso termine con una nota aprobatoria que manifieste que el aprendizaje fue alcanzado. Existen muchas razones para que un estudiante no logre esta culminación ordinaria y no es el objetivo de esta guía ni analizar estas causas ni enjuiciarlas, pero una vez que un estudiante tiene que recurrir a este procedimiento *extraordinario* para comprobar que ha alcanzado el nivel de conocimientos adecuados de la asignatura, debe tomar en consideración lo siguiente:
La preparación de un examen extraordinario requiere de una preparación razonada y con tiempo suficiente. Esta preparación puede requerir tan solo de un repaso superficial de los conceptos del curso, si el nivel de conocimientos es de regular a bueno. O bien puede necesitarse de recursar la asignatura si el diagnóstico señala que el nivel es de malo a nulo. Entre estos extremos se encuentran todas las demás situaciones y el tiempo y profundidad de la preparación está sujetos a la situación particular. Es altamente recomendable que jamás se presente un examen extraordinario sin la adecuada preparación. Esto puede acarrear, además de no acreditarlo, una frustración en el sustentante que puede ocasionar diversas reacciones en su mente. Desde luego que también es posible que a pesar de haber preparado un examen no se acredite, el alumno deberá analizar cuál o cuáles fueron las causas de este tropiezo y jamás debe desmoralizarse. La vida suele presentarnos altas y bajas pero una experiencia es un fracaso cuando así lo creemos. Debe tenerse claro qué fue lo que ocasionó la no acreditación y buscar el camino para resolver la situación. Si el problema es de aspecto vocacional, qué mejor que pueda comprenderse y buscar el rumbo que satisfaga plenamente la vocación particular. De no ser ese el motivo, no debe pensarse en problemas de falta de capacidad intelectual. En los muchos años que tengo de práctica docente pueden contarse por miles los estudiantes que he conocido por haber sido alumnos de algún grupo de mi responsabilidad o que de alguna otra manera he observado y puedo afirmar que de entre todos ellos me sobran los dedos de una mano para señalar quienes sí

podría afirmarse que han tenido problemas de este tipo. Estadísticamente puede considerarse como cero. Una persona que ha alcanzado este nivel de estudios tiene capacidad para cursar con éxito las asignaturas de los planes de estudio de ingeniería y para muchas otras carreras.

Para la presentación de un examen, el estudiante debe buscar hacerlo en las mejores condiciones físicas posibles. Los *nervios* son acusados de manera sistemática por los estudiantes que fracasan. Desde luego que no se puede negar que un estado de intranquilidad puede ocasionar problemas insuperables durante el desarrollo de un examen, pero este tipo de situaciones se disminuye drásticamente con la seguridad que el estudiante tenga de sus conocimientos. Es decir, con más y mejor preparación, menor nerviosismo. También un estudiante que ha dormido adecuadamente y se ha alimentado correctamente, tiene más posibilidades de mantenerse físicamente bien durante el examen.

La organización y limpieza de un examen ayudan enormemente a que quienes deben evaluar su nivel de conocimientos lo hagan de manera más correcta.

Para la resolución propiamente dicha del examen, tómense un tiempo adecuado en la comprensión correcta y profunda de cada uno de los reactivos. Parece una pérdida de tiempo el que se inviertan varios minutos para leer y comprender totalmente cada reactivo; sin embargo, una razón de fracaso, con una alta incidencia, es que el estudiante responde lo que cree que le están preguntando pero bien a bien no tiene claro el enunciado del reactivo. Hay ocasiones en que el alumno desperdicia el tiempo en calcular "*un dato*" Por otra parte, es lógico y natural que algunos de los reactivos del examen puedan resolverse más fácilmente que otros. Recomiendo que intenten en primer lugar aquellos que así les parezca, aunque el número de puntos que se les asignen sea bajo. Es mejor asegurar esa cantidad de puntos con ejercicios que pueden responderse de manera rápida. Posteriormente intenten la resolución de los reactivos que se estimen con una dificultad regular, para que si tienen tiempo lo dediquen a los ejercicios que catalogaron como los más difíciles.

No dejen a la suerte la acreditación de la asignatura. Recuerden que la suerte quizás no exista, lo que deben es buscar el éxito y éste se obtiene con el trabajo. El gran filósofo y escritor estadounidense Ralph Waldo Emerson (1803-1882) sintetizó el pensamiento anterior en esta frase "*Yo creo en la suerte, cuanto más trabajo más suerte tengo*".

TEMA I
FUNCIONES

EJERCICIO 1.1. Determine si la relación $T: R \to R$ tal que:

$$t(x)=\begin{cases} -\sqrt{-x-1} & , \quad -\infty < x \le -1 \\ \sqrt{1-x^2} & , \quad -1 < x < 1 \\ \sqrt{x-1} & , \quad 1 < x < +\infty \end{cases}$$

es o no función. Por otra parte, determine su dominio y represéntela gráficamente.

SOLUCIÓN.

Para la primera regla de correspondencia; es decir, para el intervalo $(-\infty, -1]$, se observa que cada valor de x en este intervalo tiene una sola imagen. Algo similar ocurre para el intervalo $(-1, 1)$ y otro tanto para la tercera regla de correspondencia, o sea para la válida en el intervalo $(1. \infty)$. Esto significa que T es función.

Ahora bien, analizando los valores de x para los cuales existe imagen, se observa que el único valor que no tiene imagen es $x_0 = 1$, por lo que el dominio de T es:

$$D = \{x \mid x \in R, x \ne 1\}$$

Para la representación gráfica, trabajemos con la primera regla de correspondencia, elevando al cuadrado ambos miembros:

$$y^2 = -(x+1)$$

se trata de la mitad de una parábola con vértice en $V_1(-1, 0)$. Es solamente la mitad de la parábola por el signo negativo que antecede al radical, y abre hacia la parte negativa del eje de las abscisas por el otro signo negativo, el que antecede al paréntesis.

Por otra parte, la segunda regla de correspondencia es:

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

al elevar al cuadrado ambos lados:

$$y^2 = 1 - x^2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

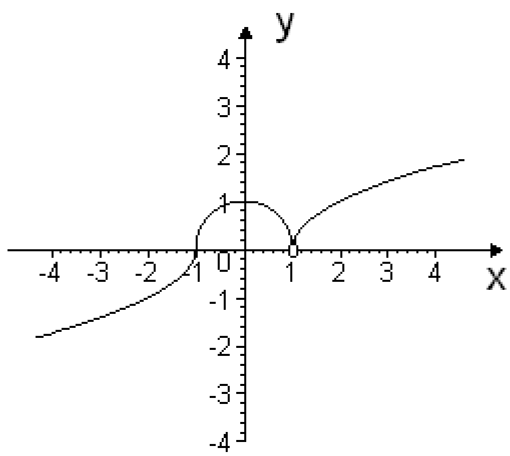
se tiene una semicircunferencia con centro en el origen y radio uno. Nuevamente es la mitad superior de la circunferencia porque ningún signo antecede al radical, lo cual significa que es el valor positivo.

Por último, la tercera regla de correspondencia es:

$$y = \sqrt{x-1}$$

$$y^2 = x - 1$$

se trata de la mitad de una parábola con vértice en $V_2(1,0)$ y que abre hacia la parte positiva del eje de las abscisas.
La representación gráfica es:



CONCEPTO PRINCIPAL: Definición de función real de variable real. Y su representación gráfica. Definiciones de dominio, de codominio y de recorrido..
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Geometría analítica plana, la circunferencia y la parábola. Álgebra elemental, operaciones con igualdades.

EJERCICIO 1.2. Sea la función
$F = \{(x, y) \mid x, y \in R; y = |x-2| + 2\}$
Determine su dominio, recorrido y codominio.

SOLUCIÓN.
La regla de correspondencia de F es:

$y = |x-2| + 2$
De acuerdo con la definición de valor absoluto, se tiene que:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & si \quad x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & si \quad x-2 < 0 \end{cases}$$

es decir

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & si \quad x \geq 2 \\ 2-x, & si \quad x < 2 \end{cases}$$

entonces:

$$y = \begin{cases} x - 2 + 2, & si \quad x \geq 2 \\ 2 - x + 2, & si \quad x < 2 \end{cases}$$

que es igual a

$$y = \begin{cases} x, & si \quad x \geq 2 \\ -x + 4, & si \quad x < 2 \end{cases}$$

de aquí se tiene que el dominio de F es:

$$D = \{x, tal\ que \quad x \in R\}$$

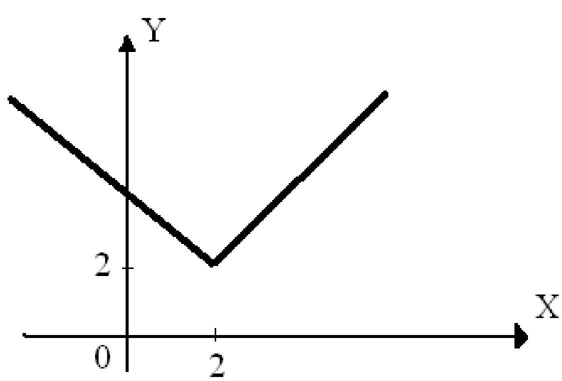
el recorrido es:

$$E = \{y, tal\ que \quad y \geq 2\}$$

y el codominio es:

$$C = \{y, tal\ que \quad y \in R\}$$

La representación gráfica de F es:



CONCEPTO PRINCIPAL: Definición de dominio, de recorrido y de codominio de una función.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Definición y propiedades del valor absoluto.

EJERCICIO 1.3.. La relación $P : R \to R$, tal que $y = p(x)$, donde:

$$p(x) = \begin{cases} \cdots \\ -\sqrt{x} \quad para\ 0 < x < +\infty \end{cases}$$

puede tener como primera regla de correspondencia a cualquiera de las siguientes expresiones:

$A)\ y = x^2 - 3 \quad para\ -\infty < x \le 0$

$B)\ y = x^2 \quad para\ -\infty < x < 0$

$C)\ y = \sqrt{-x} \quad para\ -\infty < x \le 0$

$D)\ y = -\sqrt{1-x} \quad para\ -\infty < x \le 1$

Señale para cada caso de qué tipo de relación se trata, de entre las opciones:

1) *No es función*
2) *Es una función inyectiva y suprayectiva*
3) *Es una función inyectiva pero no suprayectiva*
4) *Es una función suprayectiva pero no inyectiva*
5) *Es una función ni inyectiva ni suprayectiva*

SOLUCIÓN.
Para la expresión A, P es una función suprayectiva pero no inyectiva ya que cualquier valor real puede ser imagen para al menos un valor del dominio, por lo que es suprayectiva; sin embargo, hay valores diferentes del dominio que tienen la misma imagen, por ejemplo $p\left(-\sqrt{2}\right) = \left(-\sqrt{2}\right)^2 - 3 = -1$, por un lado, y $p(1) = -\sqrt{1} = -1$; por ello no es inyectiva.

Para la expresión B se tiene una función inyectiva pero no suprayectiva. Es inyectiva puesto que no pueden existir dos valores diferentes de x que tengan la misma imagen puesto que todos los valores negativos de la abscisa tienen imagen positiva y todos los positivos, tienen imagen negativa; además, cada regla regla de correspondencia representa un comportamiento decreciente. Por otra parte, no es suprayectiva puesto que el cero no puede ser imagen de ningún valor del dominio.

Para la expresión C, la relación P es una función inyectiva y suprayectiva. Es inyectiva porque no hay dos o más valores del dominio que tengan la misma imagen, como se demuestra:
Con la primera regla de correspondencia, se suponen dos valores $x_1, x_2 < 0$

$\sqrt{-x_1} = \sqrt{-x_2}$

elevando al cuadrado ambos miembros:

$-x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Ahora con la segunda regla de correspondencia, considerando ahora $x_3, x_4 > 0$:

$-\sqrt{x_3} = -\sqrt{x_4}$

elevando a la segunda potencia:

$x_3 = x_4$

Por último, todos los valores del dominio que son negativos tienen imagen positiva y todos los que son positivos tienen imagen negativa, mientras que el cero tiene como imagen también al cero, por ello es uno a uno.
P es suprayectiva porque cualquier valor real del codominio de P es imagen de algún valor de su dominio. Luego, P es biyectiva.

Para la expresión D, la relación P no es función puesto que en el intervalo $0 \le x \le 1$ cada valor del dominio tiene dos imágenes, una con la primera regla de correspondencia y la otra con la segunda.

El resumen de las opciones correctas es:

$A-4$

$B-3$

$C-2$

$D-1$

CONCEPTO PRINCIPAL: Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas.
CONCEPTOS SECUNDARIOS: Función real de variable real. Álgebra elemental: igualdad de ecuaciones.

EJERCICIO 1.4. Determine si la función $F : R \to R$, donde $y = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| + 3, & x < 1 \\ -|x-1| + 3, & x \ge 1 \end{cases}$$

es biyectiva.

SOLUCIÓN.
De acuerdo con la definición de valor absoluto,

$$|a| = \begin{cases} -a, \ si \ a < 0 \\ a, \ si \ a \ge 0 \end{cases}$$

la función F puede expresarse:

$$f(x) = \begin{cases} -x+4, \ si \ x < 1 \\ -x+4, \ si \ x \ge 1 \end{cases}$$

es decir $f(x) = -x + 4 \ \forall \ x \in R$

como se puede ver, se trata de una función que tiene como representación gráfica a una recta sin ninguna restricción, por lo que es una función inyectiva y suprayectiva, por lo tanto, biyectiva.

CONCEPTO PRINCIPAL: Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES. Álgebra: definición de valor absoluto. Geometría analítica plana: la recta.

EJERCICIO 1.5. Sean las funciones $F: R \to R, \quad G: R \to R, \quad H: R \to R$
Cuyas reglas de correspondencia son:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < -2 \\ x^2, & -2 \le x < 4 \\ 3, & x \ge 4 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 4, & x \le 0 \\ 2x^2 + 5, & x > 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & x \le -1 \\ -3, & -1 < x \le 1 \\ 5 + x^2, & x > 1 \end{cases}$$

Obtenga $p(x) = f(x)[g(x) + h(x)]$ y comprobar que se llega al mismo resultado si se aplica la distributividad, es decir:

$$p(x) = f(x)\,g(x) + f(x)\,h(x)$$

SOLUCIÓN.
Para calcular $p(x) = f(x)[g(x) + h(x)]$, en primer lugar se determina $g(x) + h(x)$:
Dado que la primera regla de correspondencia de la función G tiene validez para $x \le 0$, y la primera de la función H es válida para $x \le -1$, la intersección de validez de ambas está en $x \le -1$, por lo que la primera regla de correspondencia de la suma de ambas es

$$g(x) + h(x) = 4 + 2 - 2x = 6 - 2x, \quad x \le -1$$

La segunda regla de correspondencia de la suma se obtiene para el siguiente intervalo de intersección:

$$g(x) + h(x) = 4 + (-3) = 1, \quad -1 < x \le 0$$

De manera semejante se continúa hasta llegar a:

$$g(x)+h(x)=\begin{cases} -2x+6, & -\infty < x \le -1 \\ 1, & -1 < x \le 0 \\ 2x^2+2, & 0 < x \le 1 \\ 3x^2+10, & x > 1 \end{cases}$$

Ahora, para determinar a la función P, con un análisis similar en cuanto a la intersección de validez en cada intervalo se tiene que la primera regla de correspondencia de P es:

$$p(x)=(x-1)(-2x+6)=-2x^2+8x-6, \quad -\infty < x < -2$$

para la segunda se tiene:

$$p(x)=(x^2)(-2x+6)=-2x^3+6x, \quad -2 \le x \le -1$$

continuando con este procedimiento se llega a:

$$p(x)=\begin{cases} -2x^2+8x-6, & x < -2 \\ -2x^3+6x^2, & -2 \le x \le -1 \\ x^2, & -1 < x \le 0 \\ 2x^4+2x^2, & 0 < x \le 1 \\ 3x^4+10x^2, & 1 < x < 4 \\ 9x^2+30, & 4 \le x < +\infty \end{cases}$$

Por otra parte, aplicando la propiedad de distributividad $p(x)=f(x)\,g(x)+f(x)\,h(x)$ y siguiendo procedimientos similares:

$$f(x)\,g(x)=\begin{cases} 4x-4, & x < -2 \\ 4x^2, & -2 \le x \le 0 \\ 2x^4+5x^2, & 0 < x < 4 \\ 6x^2+15, & x \ge 4 \end{cases}$$

$$f(x)\,h(x)=\begin{cases} -2x^2+4x-2, & x < -2 \\ -2x^3+2x^2, & -2 \le x \le -1 \\ -3x^2, & -1 < x \le 1 \\ x^4+5x^2, & 1 < x < 4 \\ 3x^2+15, & x \ge 4 \end{cases}$$

finalmente:

$$f(x)\,g(x)+f(x)\,h(x)=\begin{cases} -2x^2+8x-6, & x<-2 \\ -2x^3+6x^2, & -2\le x\le -1 \\ x^2, & -1<x\le 0 \\ 2x^4+2x^2, & 0<x\le 1 \\ 3x^4+10x^2, & 1<x<4 \\ 9x^2+30, & 4\le x<+\infty \end{cases}$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Operaciones con funciones.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra: Operaciones con polinomios. Conjuntos.

EJERCICIO 1.6. Sean las funciones

$$F:R\to R \quad tal\ que \quad y=f(x), \quad f(x)=\begin{cases} x+4, & x\le 0 \\ 4-x, & x>0 \end{cases}$$

$$G:R\to R \quad tal\ que \quad y=g(x), \quad g(x)=x^2+2$$

$$H:R\to R \quad tal\ que \quad y=h(x), \quad h(x)=+\sqrt{1-x}$$

Obtenga la función $f\circ(g\circ h)(x)$

SOLUCIÓN.
Se tiene que $f\circ(g\circ h)(x)=f(g(h(x)))$, por lo que,
En primer lugar se obtendrá $g(h(x))$:

$$g(h(x))=\left(+\sqrt{1-x}\right)^2+2=$$
$$=1-x+2=-x+3; \quad x\le 1$$

aparentemente se trata de una recta; sin embargo, es sólo un segmento de ella puesto que el radicando no debe ser negativo, por lo que $1-x\ge 0 \quad\Rightarrow\quad x\le 1$

Al tomar en cuenta esta limitante, el recorrido de esta función compuesta es:

$$E=\{y \mid y\in R,\ y\ge 2\}$$

Ahora bien, en la nueva composición, este conjunto E se convierte en su dominio, por lo que la sustitución se debe hacer únicamente en la segunda regla de correspondencia de f, puesto que si $x \geq 2$ es la que tiene validez. Por lo tanto:

$$f(g(h(x))) = 4 - (-x+3) = x+1, \quad x \leq 1$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Composición de funciones.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Álgebra: Desigualdades. Sustitución.

EJERCICIO 1.7. De las funciones reales de variable real, que tienen como codominio los reales, cuyas reglas de correspondencia se describen a continuación, sólo una de ellas tiene función inversa. Determine cuál de ellas es y obtenga dicha inversa; en cada uno de los otros dos casos señale las razones por las que no tienen función inversa.

$$f(x) = -(x-3)^2 + 4, \quad x \leq 5$$

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

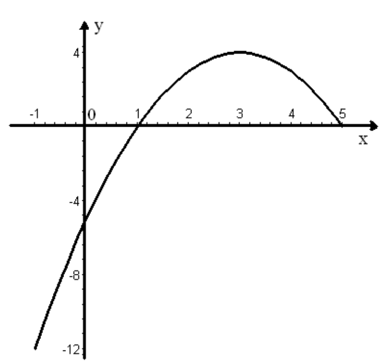
$$h(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2+4}, & x < 0 \\ \dfrac{3}{2}\sqrt{x^2+4}, & x \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:
Función f:

$$y = -(x-3)^2 + 4$$

$y - 4 = -(x-3)^2$, o bien: $(x-3)^2 = -(y-4)$

se trata de un segmento de una parábola con vértice en V(3, 4), eje paralelo al eje de las ordenadas y que abre hacia la dirección negativa de dicho eje. Su gráfica es:



La función no tiene inversa puesto que no es ni inyectiva ni suprayectiva. No es inyectiva porque existen diferentes valores de x que tienen la misma imagen, lo cual gráficamente se observa porque una recta horizontal cortaría en dos diferentes puntos a la curva. Tampoco es suprayectiva dado que el recorrido de f es el conjunto $M = \{y \mid y \in R, \quad y \leq 4\}$ que no es igual al codominio, definido en el enunciado como el conjunto de los números reales.

Función g:
Veamos si g es inyectiva, para ello analicemos primero si pueden tenerse dos valores $x_1 \neq x_2 < 0$ para los cuales se tiene $g(x_1) = g(x_2)$:

$$x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1$$

$$x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ahora, si se tienen dos valores positivos x_3, x_4:

$$x_3^2 + 1 = x_4^2 + 1$$

$$x_3^2 = x_4^2$$

$$x_3 = \pm x_4$$

esta igualdad sólo es posible para el signo positivo, es decir $x_3 = x_4$ ya que se partió de la hipótesis de que se trata de dos valores positivos.

Por último, un valor negativo x_5 y otro positivo x_6 nos lleva a una igualdad imposible para la hipótesis anterior:

$$x_5^3 + 1 = x_6^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad x_5^3 = x_6^2$$

Esto significaría que un número negativo tendría que ser igual a otro positivo. Obviamente solamente podría cumplirse para el valor cero, que es contrario a la hipótesis.

Con el análisis anterior puede concluirse que g es inyectiva.

Ahora investiguemos si la función es *sobre:*
Con la primera de sus reglas de correspondencia se tiene que las imágenes de esta parte de g están en el conjunto $E_1 = \{y \mid y \in R, \quad y < 1\}$

Ahora, con su segunda regla de correspondencia se observa que las imágenes están en el conjunto $E_2 = \{y \mid y \in R, \quad y \geq 1\}$

Por lo que el recorrido de g, que es la unión de los dos conjuntos anteriores, resulta todo el conjunto de los números reales y, por lo tanto, la función es suprayectiva.

Como la función en estudio es a la vez uno a uno y sobre, se puede afirmar que es biyectiva y tiene inversa. Para su obtención se procede por intervalos.

Para $y < 0$:

$$x = y^3 + 1$$

$$y^3 = x - 1$$

$$y = \sqrt[3]{x-1}$$

válida para $y < 1$ ya que se intercambiaron dominio y recorrido.

Ahora para $y \geq 0$:

$$x = y^2 + 1$$

$$y^2 = x - 1$$

$y = +\sqrt{x-1}, \quad x \geq 1$ (se considera el signo positivo que antecede al radical puesto que proviene del caso $x \geq 0$ de la función original).

Entonces:

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1}, & x < 1 \\ +\sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Finalmente, la función h:

Su primera regla de correspondencia es:

$$y = -\frac{3}{2}\sqrt{x^2+4}, \quad x < 0$$

$$2y = -3\sqrt{x^2+4}, \qquad 4y^2 = 9x^2 + 36$$

$$4y^2 - 9x^2 = 36, \qquad \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1, \quad x < 0$$

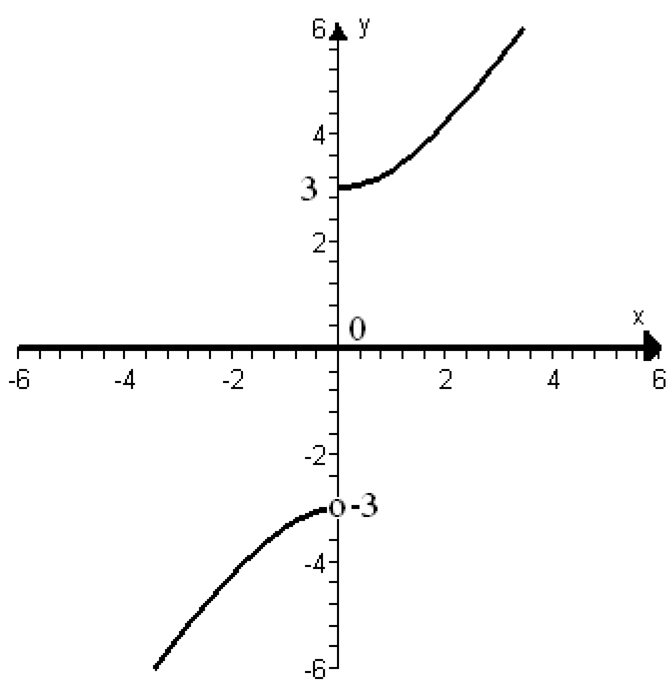
Dado que el radical está precedido por un signo negativo, y que $x < 0$, se trata de la mitad de la rama inferior de una hipérbola con centro en el origen y eje transverso coincidente con el eje de las ordenadas.

Ahora, su segunda regla de correspondencia:

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + 4}, \quad x \geq 0$$

Claramente se observa que se trata de la misma hipérbola pero por el signo positivo y porque $x \geq 0$ se tiene la mitad de la rama superior de la hipérbola.

A continuación se presenta la gráfica:



La función es inyectiva pero no suprayectiva porque su recorrido

$$T = \{y \mid \quad y \in R, \quad -\infty < y < -3 \bigcup 3 \leq x < +\infty\}$$

no coincide con su codominio que es el conjunto de los números reales.

CONCEPTO PRINCIPAL: Función inversa.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Geometría analítica plana: la parábola, la hipérbola. Álgebra elemental: Completar cuadrados. Radicales. Cálculo diferencial: Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas.

EJERCICIO 1.8. Sea la función $F: R \to R,$ tal que $y = f(x)$ definida paramétricamente por

$$x = \begin{cases} 2t, & t < -1 \\ -t-1, & -1 \le x < \infty \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} t^2 - 2, & t < 0 \\ t & t \ge 0 \end{cases}$$

Determine la expresión cartesiana de F con sus correspondientes reglas de correspondencia.

SOLUCIÓN.

Para obtener las reglas de correspondencia de F, obsérvese que las expresiones paramétricas válidas para el intervalo $-\infty < x < -1$ son:

$$x = 2t \quad \ldots (1)$$
$$y = t^2 - 2 \ldots (2)$$

de (1):

$$t = \frac{x}{2}$$

en (2):

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2 = \frac{x^2}{4} - 2 \quad \ldots (3)$$

ahora, en el intervalo $-1 \le t < 0$ se tiene:

$$x = -t - i \quad \cdots (4)$$
$$y = t^2 - 2 \ \cdots\cdots (5)$$

de (4):

$t = -x - 1$

en (5):

$y = (-x-1)^2 - 2 = (x+1)^2 - 2 \quad \cdots \quad (6)$ puesto que $(-a)^2 = (a)^2$

Por último, para $t \geq 0$:

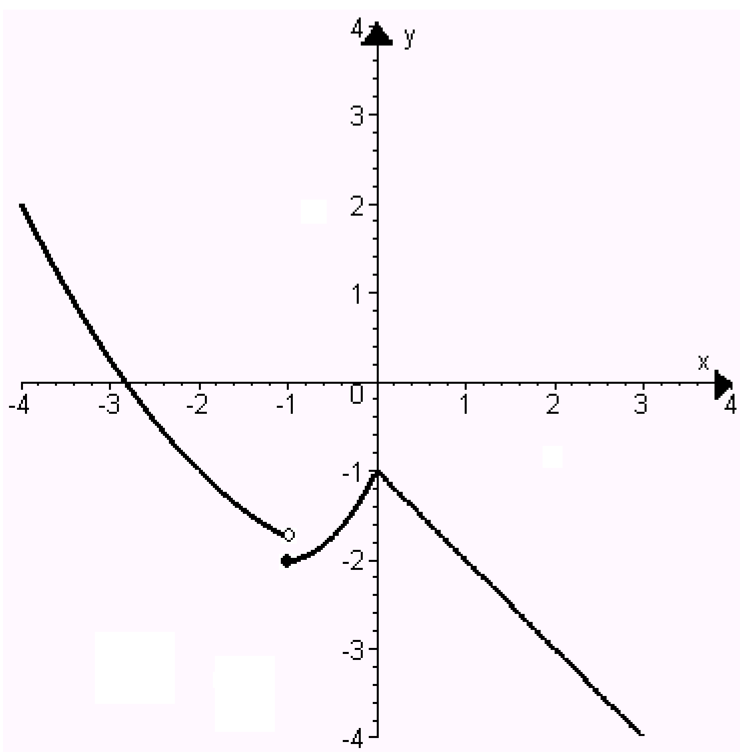
$x = -t - 1 \quad \cdots \quad (7)$
$y = t \qquad \cdots \quad (8)$

de (7) $\quad t = -x - 1$, en (8) $\quad y = -x - 1 \quad \cdots \quad (9)$

Por lo que las reglas de correspondencia de la función, en su expresión cartesiana son:

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - 2, & -\infty < x < -1 \\ (x+1)^2 - 2, & -1 \leq x < 0 \\ -x - 1, & 0 \leq x < +\infty \end{cases}$$

Y su gráfica es:



CONCEPTO PRINCIPAL: Clasificación de funciones según su expresión: explícitas, implícitas, paramétricas y dadas por más de una regla de correspondencia.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Geometría analítica plana: la parábola, la recta. Álgebra elemental: Sustitución en ecuaciones.

EJERCICIO 1.9. Demostrar que el producto de una función par por una impar es una función impar.

SOLUCIÓN.
Sean $f : R \to R$ una función par
y $g : R \to R$ una función impar;

es decir: $f(-x) = f(x) \quad \forall\, x \in R$
$g(-x) = -g(x) \quad \forall\, x \in R$

y sea h la función producto de las dos anteriores; esto es:

$h : R \to R$ tal que: $h(x) = f(x)g(x) \quad \forall \quad x \in R$

entonces: $h(-x) = f(-x)\, g(-x) =$ por la definición de h
$= f(x)\left[-g(x)\right] =$ por las hipótesis
$= -f(x)\, g(x) =$ por una regla de los signos
$= -h(x)$ por la definición de la función h

Con lo que queda demostrado que $h(-x) = -h(x)$ y la función producto es impar.

CONCEPTO PRINCIPAL: Funciones pares e impares.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Cálculo diferencial: operaciones con funciones. Álgebra elemental: regla de los signos.

EJERCICIO 1.10. Sea la función F :

$F : A \to B$ tal que $y = f(x)$, donde:

$$A = \left\{ x \,\middle|\, x \in R,\quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right\}$$
$$B = \left\{ y \,\middle|\, y \in R,\quad -\infty < y < 1 \right\}$$

$$f(x)=\begin{cases}\tan x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0\\ sen\, x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Determine si la función F es invertible y, en caso afirmativo, obtenga las reglas de correspondencia de la función inversa.

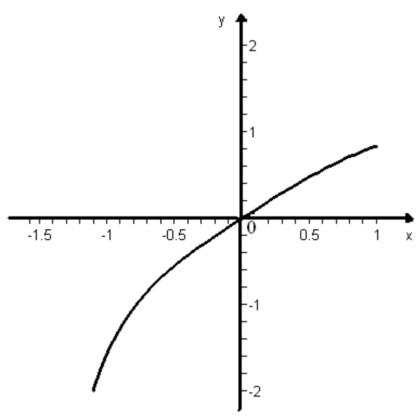
SOLUCIÓN.

La función es inyectiva puesto que si $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right]$; $\tan x_1=\tan x_2 \quad\Rightarrow\quad x_1=x_2$

Además, si $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $sen\, x_1 = sen\, x_2 \quad\Rightarrow\quad x_1=x_2$

y si $x_1\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right]$: y $x_2\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, entonces $\tan x_1\ne sen\, x_2$

Por otra parte, el recorrido de F es igual a B, por lo que es suprayectiva, y al ser inyectiva también, F es biyectiva y tiene inversa.



Gráfica de la función original

Para invertir la función, en el caso de su primera regla de correspondencia:

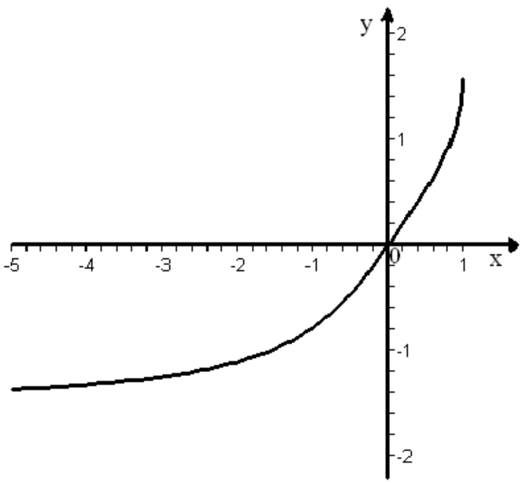
$$y=\tan x$$
$$x=\tan y \quad\Rightarrow\quad y=ang\tan x,\quad -\infty<x\le 0$$

Ahora, para la segunda:

$$y=sen\, x$$
$$x=sen\, y \quad\Rightarrow\quad y=ang\; sen\, x,\quad 0<x<1$$

Es decir, las reglas de correspondencia de la función inversa son:

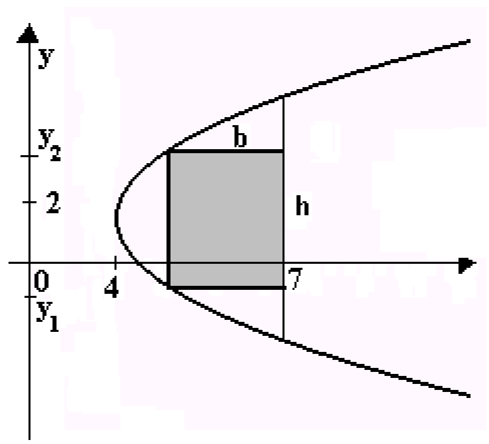
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} ang\tan x, & -\infty < x \le 0 \\ ang\,sen\, x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$



Gráfica de la función inversa

CONCEPTO PRINCIPAL: Funciones trigonométricas directas e inversas.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Cálculo diferencial: función inversa. Trigonometría: razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes.

EJERCICIO 1.11. Determine una expresión que relacione el área de cualquier rectángulo inscrito en la figura limitada por la parábola de ecuación $(y-2)^2 = 9(x-4)$ y la recta cuya ecuación es $x = 7$ (ver figura) como función de una sola variable.



SOLUCIÓN.

Si se emplea como variable independiente a la abscisa x, se tiene que la base del rectángulo es $b = 7 - x$. La altura de dicho rectángulo está dada por $h = y_2 - y_1$, en donde:

$$(y-2)^2 = 9(x-4)$$
$$y - 2 = \pm\sqrt{9(x-4)}$$
$$y = 2 \pm 3\sqrt{x-4}$$

por lo que:

$$y_2 = 2 + 3\sqrt{x-4}, \qquad y_1 = 2 - 3\sqrt{x-4}$$

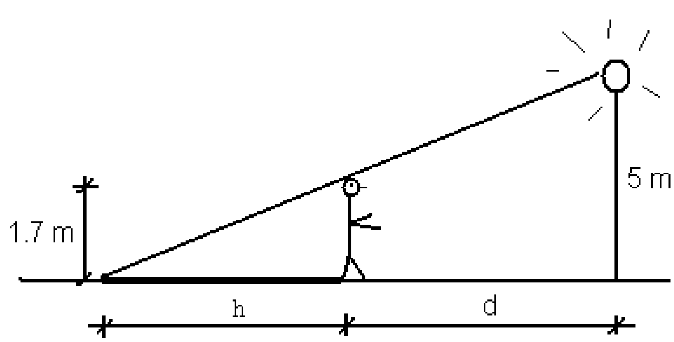
$$\therefore h = 2 + 3\sqrt{x-4} - \left(2 - 3\sqrt{x-4}\right) = 6\sqrt{x-4}$$

entonces:

$A = (7-x)\left(6\sqrt{x-4}\right)$ unidades de área.

CONCEPTO PRINCIPAL: Formulación de funciones como modelos matemáticos de problemas físicos y geométricos.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Geometría analítica plana: la parábola, la recta. Geometría euclidiana: área de un rectángulo.

EJERCICIO 1.12. Un poste de alumbrado público tiene en su extremo superior, a cinco metros de altura, una luminaria. Una persona de 1.70 m de estatura se aproxima al poste caminando por la acera. Determine una expresión que represente al tamaño de la sombra de la persona sobre el piso (h) en función de la distancia horizontal (d) del poste a la persona.



SOLUCIÓN.

De la figura se puede observar que se forman triángulos semejantes. Al considerarlos se tiene:

$$\frac{5}{d+h} = \frac{1.7}{h}$$

$$5h = 1.7(d+h)$$

$$3.3h = 1.7d$$

$h = \frac{1.7}{3.3}d = 0.52d$ unidades de longitud

CONCEPTO PRINCIPAL: Formulación de funciones como modelos matemáticos de problemas físicos y geométricos.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Geometría euclidiana: triángulos semejantes

TEMA 2
LÍMITES Y CONTINUIDAD

EJERCICIO 2.1. Calcule, sin utilizar la regla de L'Hôpital:

. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(\cos x - 1)^2}{sen\, x}$

SOLUCIÓN.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)^2}{sen\, x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 2\cos x + 1}{sen\, x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1 - 2\cos x + 2}{sen\, x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-sen^2 x + 2(1 - \cos x)}{sen\, x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} (-sen\, x) + 2 \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{sen\, x} =$$

$$= 0 + 2 \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{sen\, x\,(1 + \cos x)} =$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{sen^2 x}{sen\, x\,(1 + \cos x)} =$$

$$= 2 \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{1 + \cos x} = 0$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Cálculo de límites.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Trigonometría: identidades trigonométricas. Álgebra elemental: Factorización, productos notables, simplificación de fracciones.

EJERCICIO 2.2. Calcule, sin utilizar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{3sen^3\theta + 6sen^2\theta - 4sen\theta - 5}{\cos^2\theta}$$

SOLUCIÓN.

Al sustituir directamente se tiene:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{3sen^3\theta + 6sen^2\theta - 4sen\theta - 5}{\cos^2\theta} = \frac{0}{0}$$

Si se hace el cambio de variable

$u = sen\theta$

y tomando en cuenta que $\cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$ y, además que cuando $\theta \to \frac{\pi}{2}$, $u \to 1$:

$$L = \lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}} \frac{3sen^3\theta + 6sen^2\theta - 4sen\theta - 5}{1 - sen^2\theta} =$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{3u^3 + 6u^2 - 4u - 5}{1 - u^2} =$$

factorizando numerador y denominador:

$$L = \lim_{x\to 1} \frac{(u-1)\left(3u^2 + 9u + 5\right)}{-(u-1)(u+1)} = \lim_{u\to 1} \frac{3u^2 + 9u + 5}{-(u+1)} = -\frac{17}{2}$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Cálculo de límites.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Trigonometría: identidades trigonométricas. Álgebra elemental: Factorización, productos notables,

EJERCICIO 2.3. Calcule, sin utilizar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen^2 x - sen^3 x}{\cos x - 1}$$

SOLUCIÓN.

Al sustituir directamente se tiene:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{sen^2 x - sen^3 x}{\cos\ x - 1} = \frac{0-0}{1-1} = \frac{0}{0}$$

Si se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\left(sen^2 x - sen^3 x\right)(\cos x + 1)}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(sen^2 x - sen^3 x\right)(\cos x + 1)}{\cos^2 x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(sen^2 x - sen^3 x\right)(\cos x + 1)}{-sen^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} (sen\, x - 1)(\cos x + 1) = -2$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Cálculo de límites.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Trigonometría: identidades trigonométricas. Álgebra elemental: Factorización, productos notables,

EJERCICIO 2.4. Sea la función $f: R \to R$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^{2/3} - 2x^{1/2} + 6}, & x < 0 \\ \\ \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt{x^2+1}}{x^2}, & x > 0 \end{cases}$$

Como se observa, la función no está definida para $x = 0$. ¿Se trata de una discontinuidad removible? En caso afirmativo, ¿cómo se removería esta discontinuidad?

SOLUCIÓN.

Para que la discontinuidad pueda removerse, el límite de f para cuando $x \to 0$ debe existir.
Primeramente:

$$L_1 = \lim_{x \to 0^-} \frac{x-1}{x^{2/3} - 2x^{1/2} + 6} = -\frac{1}{6}$$

En este caso el límite lateral se calcula directamente pues no se presenta indeterminación.

Ahora el otro límite lateral:

$$L_2 = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt{x^2+1}}{x^2} = \frac{0}{0}$$

Para intentar eliminar esta indeterminación, haremos el cambio de variable:

$$x^2 + 1 = u^6$$

se tiene que si $x \to 0^+, \quad u \to 1^+$

además, despejando:

$$x^2 = u^6 - 1$$

entonces:

$$L_2 = \lim_{u \to 1^+} \frac{\sqrt[3]{u^6} - \sqrt{u^6}}{u^6 - 1} =$$

$$= \lim_{u \to 1^+} \frac{u^2 - u^3}{u^6 - 1}$$

factorizando:

$$L_2 = \lim_{u \to 1^+} \frac{(1-u)u^2}{(u-1)\left(u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + 1\right)} =$$

$$= \lim_{u \to 1^+} \frac{-(u-1)u^2}{(u-1)\left(u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + 1\right)} =$$

$$= \lim_{u \to 1^+} \frac{-u^2}{\left(u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + 1\right)} = -\frac{1}{6}$$

Por ello, el límite existe ya que

$$\underset{x\to 0^-}{lím}\ f(x) = \underset{x\to 0^+}{lím}\ f(x) = \underset{x\to 0}{lím}\ f(x) = -\frac{1}{6}$$

La conclusión es que la discontinuidad es removible y basta con definir:

$$f(0) = -\frac{1}{6}$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Concepto de continuidad. Límites laterales. Definición y determinación de la continuidad de una función en un punto y en un intervalo..
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental: racionalización, factorización. Cálculo diferencial: cambio de variable, formas indeterminadas, cálculo de límites

EJERCICIO 2.5. Sea la función $f : R \to R$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} -2x-2\,, & -\infty < x < -1 \\ g(x) & \\ 3x-3\,, & 2 \le x < +\infty \end{cases}$$

De la tres expresiones:

$$A)\ g(x) = x^2 - 1, \quad -1 < x < 2$$
$$B)\ g(x) = x+1, \quad -1 \le x < 2$$
$$C)\ g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, \quad -1 \le x < 2$$

indique cuál de ellas debe considerarse como la segunda regla de correspondencia de f para que la función sea continua en todos los reales; además, en los otros dos casos señale porqué no cumple con esta condición.

SOLUCIÓN.

La opción A no puede ser ya que para $x = -1$, f no tiene imagen ni con su primera regla de correspondencia ni con la de esta opción, a pesar de que si sustituyéramos los valores de $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$ aparentemente cumpliría; sin embargo al no estar definida la función, no puede ser continua para el primer valor.

La opción B es la correcta porque para $x_1 = -1, \quad y_1 = -1+1 = 0$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (-2x - 2) = 0$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (x + 1) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to -1} f(x) = 0 = f(0)$$

Ahora para $x = 2$:

$$f(2) = 3(2) - 3 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3x - 3) = 3$$

$$\therefore f(2) = \lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

Por último, la opción C no puede ser ya que la función sería discontinua para $x_3 = 1$, a pesar de que se cumpliría la continuidad en los valores $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$

CONCEPTO PRINCIPAL: Concepto de continuidad. Límites laterales. Definición y determinación de la continuidad de una función en un punto y en un intervalo..
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental: factorización, productos notables. Cálculo diferencial: formas indeterminadas, cálculo de límites

EJERCICIO 2.6. Determine si la función $f : R \to R$ es continua en todo el conjunto de los números reales:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(3x - 6)}{x - 2}, & -\infty < x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ \dfrac{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x - 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}, & 2 < x < +\infty \end{cases}$$

SOLUCIÓN.

En el intervalo $(-\infty, 2)$ la función es continua puesto que el único valor que anula al denominador está fuera del intervalo.

Para $x = 2$:

Se tiene que $f(2) = 3$

$$L_{1}= \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{sen(3x-6)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{sen\,3(x-2)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{3\,sen\,3(x-2)}{3(x-2)} =$$

si $3(x-2) = u$, cuando $x \to 2^{-}$, $u \to 0^{-}$

entonces:

$$L_1 = \lim_{u\to 0^-} \frac{3\,sen\,u}{u} = 3$$

Por otra parte:

$$L_2 = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x - 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{0}{0}$$

Para eliminar la indeterminación, factoricemos numerador y denominador. Para ello, por medio de la división sintética:

CONCEPTO PRINCIPAL: Concepto de continuidad. Límites laterales. Definición y determinación de la continuidad de una función en un punto y en un intervalo..
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental: factorización, productos notables. Cálculo diferencial: formas indeterminadas, cálculo de límites

EJERCICIO 2.7. Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{x+3}, & -3<x\le 0\\ g(x) & \\ -(x+3)^2+6, & 2<x<+\infty\end{cases}$$

Con dominio: $D=\{x \mid \; x\in R, x>-3\}$

Determine la regla de correspondencia $g(x)$ de tal manera que represente un segmento de recta que hace que f sea continua en su dominio.

SOLUCIÓN.

El segmento de recta debe unir los puntos A(0, 2), que se obtiene de la primera regla de correspondencia para x=0; y B(2, -19), obtenido de la tercera regla de correspondencia para x=2. De manera que, por la fórmula de la recta que pasa por dos puntos:

$$y-2=\frac{-19-2}{2-0}(x-0)$$

$$y-2=-\frac{21}{2}x$$

$$y=-\frac{21}{2}x+2$$

La función f queda:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{x+3}, & -3<x\le 0\\ -\dfrac{21}{2}x+2, & 0<x\le 2\\ -(x+3)^2+6, & 2<x<+\infty\end{cases}$$

ya que A pertenece al primer subintervalo y B no pertenece al tercero.

CONCEPTO PRINCIPAL: Concepto de continuidad. Límites laterales. Definición y determinación de la continuidad de una función en un punto y en un intervalo..
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Geometría analítica plana: ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Álgebra elemental: despeje de literales.

EJERCICIO 2.8. Calcule el límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-4x^3}{8x^3+5x^2-3x+1}$$

SOLUCIÓN.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-4x^3}{8x^3+5x^2-3x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^3}-\frac{4x^3}{x^3}}{\frac{8x^3}{x^3}+\frac{5x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{1}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^3}-4}{8+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Cálculo de límites de funciones racionales cuando la variable tiende al infinito.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental: fracciones. Leyes de los exponentes.

TEMA 3
LA DERIVADA Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES

EJERCICIO 3.1. Determine la derivada de la función $f(x)=x^{2/3}$ por medio de la definición (método de los cuatro pasos).

SOLUCIÓN.

PRIMER PASO

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^{2/3}$$

SEGUNDO PASO

$$f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^{2/3}-(x)^{2/3}$$

TERCER PASO

$$\frac{f(x+\Delta x)\;-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^{2/3}-x^{2/3}}{\Delta x}$$

CUARTO PASO

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\;-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{2/3}-x^{2/3}}{\Delta x}$$

De acuerdo con el producto notable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[(x+\Delta x)^{1/3}+x^{1/3}\right]\left[(x+\Delta x)^{1/3}-x^{1/3}\right]}{\Delta x}$$

Ahora consideremos el otro producto notable $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$, así que multiplicando y dividiendo por $(x+\Delta x)^{2/3}+(x+\Delta x)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}$:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[(x+\Delta x)^{1/3}+x^{1/3}\right]\left[(x+\Delta x)^{1/3}-x^{1/3}\right]\left[(x+\Delta x)^{2/3}+(x+\Delta x)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right]}{\Delta x\left[(x+\Delta x)^{2/3}+(x+\Delta x)^{1/3}x^{1/3}+x^{2/3}\right]}=$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[(x+\Delta x)^{1/3} + x^{1/3}\right][x+\Delta x - x]}{\Delta x\left[(x+\Delta x)^{2/3} + (x+\Delta x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}\right]}$$

Al simplificar:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{1/3} + x^{1/3}}{(x+\Delta x)^{2/3} + (x+\Delta x)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} = \frac{2x^{1/3}}{3x^{2/3}} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Cálculo de la derivada a partir de su definición.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental: fracciones, productos notables. Cálculo diferencial: cálculo de límites.

EJERCICIO 3.2. De las tres expresiones siguientes, indique cuál de ellas representa la derivada de la función f con respecto a x, valuada en $x_0 = 3$; además, señale para cada una de las otras dos expresiones porqué no corresponden a la definición de dicha derivada:

$a)\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) + f(3)}{\Delta x}$

$b)\ \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3}$

$c)\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3) - f(x+\Delta x)}{\Delta x}$

SOLUCIÓN.

La opción correcta es la b puesto que:

$\Delta f(x) = f(x) - f(3)$

$\Delta x = x - 3$

si $x \to 3$ entonces $\Delta x \to 0$

por lo que $\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\Big|_{x=3}$

Por otra parte, la opción a no representa a la derivada porque en el numerador se tiene la suma de la función valuada en $x_0 = 3$ más la función incrementada y debe ser la diferencia.

Finalmente, la opción c en realidad representa a la derivada mencionada pero cambiada de signo puesto que los términos del numerador están en diferente orden.

CONCEPTO PRINCIPAL: Definición de la derivada de una función en un punto.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental: reglas de los signos. Cálculo diferencial: incrementos.

EJERCICIO 3.3. Sea $y = u^{3/2}$

donde $u = \cos \pi v$

$$v = \frac{x^2 - 4}{x+1}$$

calcule $\frac{dy}{dx}$ para $x = 1$.

SOLUCIÓN.

Por la regla de la cadena se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} \quad \text{... (1)}$$

El tercero de los factores se obtiene:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{(x+1)(2x) - (x^2-4)(1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2 + 4}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)^2}$$

Para $x = 1 \quad v'(1) = \frac{7}{4}$

Por otra parte,:

$$\frac{du}{dv} = -\pi \, sen \, \pi \, v \text{ ; pero } x = 1 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1^2 - 4}{1+1} = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad u'\left(-\frac{3}{2}\right) = -\pi \, sen\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\pi$$

Además, $\frac{dy}{du} = \frac{3}{2}u^{1/2}$ y tenemos que si $v = -\frac{3}{2}$, entonces $u = \cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right) = 0$

Finalmente:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = (0)(-\pi)\left(\frac{7}{4}\right) = 0$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Derivación de la función compuesta. Regla de la cadena.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental: Sustitución de variables, leyes de los exponentes. Cálculo diferencial: Derivación de la suma, producto y cocientes de funciones, derivación de una función elevada a un exponente racional, derivación de las funciones trigonométricas.

EJERCICIO 3.4. Sea la función $f: R \to R; \quad x \geq 0, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}$; de tal manera que y es función de x, $\quad x = \sec^2 y$

Calcule $\left. D_x y \right|_x$

SOLUCIÓN.

Para $x = 2$ se tiene que $\sec^2 y = 2$, $\quad \sec y = \pm\sqrt{2}$, $\quad y = ang\sec \pm\sqrt{2}$

De acuerdo con la definición del recorrido de la función, el único valor incluido en él es $y = \frac{\pi}{4}$

Ahora, aplicando la expresión de la derivada de la función inversa:

$$D_x y = \frac{1}{D_y x}$$

entonces, $D_y x = 2\sec^2 y \tan y$

por lo que

$$D_x y = \frac{1}{2\sec^2 y \tan y}$$

para $y = \frac{\pi}{4}$:

$$D_x y\Big|_{2} = \frac{1}{2\left(\sqrt{2}\right)^2 (1)} = \frac{1}{4}$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Derivación de la función inversa.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental: Leyes de los exponentes. Trigonometría: valores de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes. Cálculo diferencial: Derivación de una función elevada a un exponente racional, derivación de las funciones trigonométricas.

EJERCICIO 3.5. Sea la función expresada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & si \quad x < 2 \\ (x-1)^2 + 2, & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Determine si f es derivable en todos los reales. Justifique su respuesta.

SOLUCIÓN.

Para $x < 2$, f es derivable puesto que $f'(x) = 2$

Para $x > 2$, f también es derivable: $f'(x) = 2x - 2$

Ahora analicemos para $x = 2$:

La derivada lateral izquierda $f_-'(2) = 2$

La derivada lateral derecha $f_+'(2) = 2$

Sin embargo, f no es derivable para $x = 2$ puesto que no es continua en ese valor al no estar definida.

CONCEPTO PRINCIPAL: Definición de derivadas laterales. Relación entre derivabilidad y continuidad.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental**:** operaciones fundamentales, sustitución Cálculo diferencial: Derivación de una función elevada a un exponente racional.

EJERCICIO 3.6. Sea la función f definida paramétricamente por:

$$\begin{cases} y = \sec t \\ x = \cos t \end{cases} \quad ; \quad t \in R$$

Determine $D_x y$., $D_x^2 y$ y $D_x^3 y$; además deduzca una expresión general para $D_x^n y$ para todo $n \in N$.

SOLUCIÓN.

De la expresión $D_x y = \dfrac{D_t\, y}{D_t x}$

$$D_x y = \frac{\sec t\, \tan t}{-sen\, t} = \frac{\frac{1}{\cos t}\,\frac{sen\, t}{\cos t}}{-sen\, t} = -\sec^2 t$$

Ahora, tomando en cuenta que $D_x^2 y = \dfrac{D_t(D_x y)}{D_t x}$

$$D_x^2 y = \frac{-2\sec^2 t\, \tan t}{-sen\, t} = \frac{\frac{2}{\cos^2 t}\,\frac{sen\, t}{\cos t}}{sen\, t} = 2\sec^3 t$$

Por otra parte, $D_x^3 y = \dfrac{D_t(D_x^2 y)}{D_t x}$

$$D_x^3 y = \frac{(3)(2)\sec^3 t\, \tan t}{-sen\, t}$$

simplificando:

$$D_x^3 y = -(3!)\sec^4 t$$

Se deduce que:

$$D_x^n y = (-1)^{n+1}\,(n!)\sec^{n+1} t$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Derivación de funciones expresadas en forma paramétrica.

CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental**:** operaciones fundamentales, sustitución, factorial de un número natural. Cálculo diferencial: Derivación de una función elevada a un exponente racional. Derivadas de las funciones trigonométricas. Derivadas de orden superior.

EJERCICIO 3.7. Calcule la derivada de y con respecto a x para

$A)\ y = ang\sec\left(\cos x^2\right)$
$B)\ y = \cos\left(ang\sec x^2\right)$

SOLUCIÓN.

$$A)\quad y' = \frac{D_x \cos x^2}{\left|\cos x\right| \sqrt{\cos^2 x - 1}} =$$

$$= \frac{\left(-sen\, x^2\right) D_x x^2}{\left|\cos x\right| \sqrt{\cos^2 x - 1}} = \frac{-2x\, sen\, x^2}{\left|\cos x\right| \sqrt{-sen^2 x}}$$

Ésta es la expresión analítica de la derivada pedida; sin embargo, analizándola puede observarse que la derivada no existe para ningún valor de x puesto que el signo negativo que antecede al cuadrado del seno de x dentro del radical del denominador, hace que los únicos valores posibles del radicando sean o negativos o cero. En caso de ser negativos, la extracción de la raíz cuadrada obligaría a trabajar en el campo complejo, lo cual está fuera de los objetivos del cálculo de funciones reales de variable real; y el caso del valor nulo nos lleva a la no existencia de la derivada pues la división entre cero no existe ni siquiera en variable compleja.

$$B)\ y' = \left[-sen\ \left(ang\sec x^2\right)\right] D_x\, ang\sec x^2 =$$

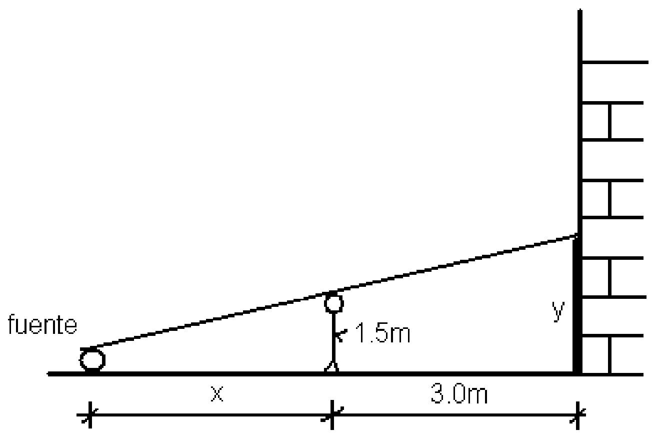
$$= \left[-sen\ \left(ang\sec x^2\right)\right] \frac{D_x x^2}{x^2 \sqrt{x^4 - 1}} = -\frac{2x\, sen\left(ang\sec x^2\right)}{x^2 \sqrt{x^4 - 1}} =$$

$$= -\frac{2\, sen\left(ang\sec x^2\right)}{x\sqrt{x^4 - 1}}$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Derivación de las funciones trigonométricas directas e inversas.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental**:** operaciones fundamentales. Trigonometría: identidades trigonométricas. Cálculo diferencial: Derivación de una función elevada a un exponente racional.

EJERCICIO 3.8. Una persona de 1.5 m de estatura se encuentra parada frente a una pared vertical. La distancia que separa a la persona de la pared es de 3.0 m. A ras de suelo una fuente luminosa se aproxima a la persona con una rapidez constante de 1 m/s. ¿A que distancia de la persona debe estar dicha fuente luminosa para que su sombra proyectada sobre la pared crezca con la misma magnitud de la velocidad de la fuente?

SOLUCIÓN.



Por triángulos semejantes:

$$\frac{x+3}{y} = \frac{x}{1.5} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1.5(x+3)}{x} = \frac{1.5x+4.5}{x}$$

Al derivar ambos miembros de la expresión con respecto al tiempo:

$$\dot{y} = \frac{x\left(1.5\,\dot{x}\right) - \left(1.5\,x + 4.5\right)\dot{x}}{x^2}$$

para $\dot{x} = -1$ constante, $\dot{y} = 1$ en el instante estudiado. El signo negativo de la rapidez de x se debe a que esta distancia se acorta, mientras que la sombra tiene una velocidad de la misma magnitud pero con signo positivo porque la distancia y crece. De manera que:

$$1 = \frac{x\,(-1.5) - (1.5x + 4.5)\,(-1)}{x^2}$$

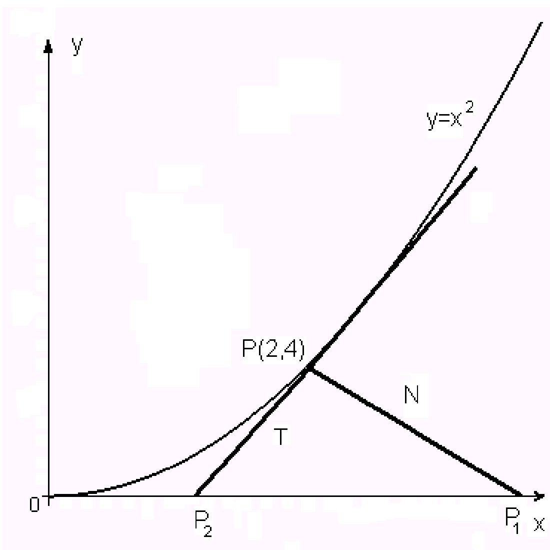
Despejando:

$$x^2 = -1.5x + 1.5x + 4.5$$

$$\therefore \quad x = \sqrt{4.5} \approx 2.12\,m$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Aplicación física de la derivada como razón de cambio de variables relacionadas.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental**:** operaciones fundamentales. Fracciones. Geometría euclidiana: triángulos semejantes. Cálculo diferencial: Derivación de un cociente. Regla de la cadena.

EJERCICIO 3.9. Determine el área del triángulo que se muestra en la figura:



en donde T es la recta tangente a la parábola cuya ecuación es $y = x^2$, en el punto $P(2,4)$; N es la recta normal a la parábola en el mismo punto.
NOTA: El dibujo está fuera de escala y sólo es esquemático.

SOLUCIÓN.

La pendiente de la recta T es igual a la derivada de la función, valuada en P

$$\therefore \quad m = y'\big|_P = 2x\big|_P = 4$$

La ecuación de la recta T es:

$$y - 4 = 4(x-2), \qquad y = 4x - 4$$

su punto de intersección con el eje de las abscisas se obtiene cuando $y = 0$:

$$0 = 4x - 4 \quad \Rightarrow \quad x = 1, \qquad P_1(1,\, 0)$$

Por otra parte, la recta N tiene por ecuación:

$$y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2), \qquad y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$$

dado que las pendientes de rectas perpendiculares son recíprocas y de signo cambiado.

Su punto de intersección con el eje de las abscisas:

$$0 = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 18, \quad P_2(18,\, 0)$$

El área del triángulo se obtiene:

$A = \dfrac{1}{2}\overline{PP_1} \bullet \overline{PP_2}$ dado que estos segmentos son los catetos.

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{(1-2)^2 + (0-4)^2}\,\sqrt{(18-2)^2 + (0-4)^2} =$$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{17}\,\sqrt{272} = 68$ unidades de área.

CONCEPTO PRINCIPAL: Aplicaciones geométricas de la derivada: dirección de una curva, ecuaciones de la recta tangente y la recta normal, ángulo de intersección entre curvas.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental**:** radicales. Geometría analítica plana: Ecuación de la recta en su forma punto pendiente, relación entre las pendientes de rectas perpendiculares.

EJERCICIO 3.10. Sea la curva C definida paramétricamente por:

$$C: \begin{cases} x = -4t^2 + 5 \\ y = 2\, sen\, \pi\, t \end{cases}; \quad t \in R$$

Determine si el punto P de coordenadas $P(4, 2)$ pertenece a C. En caso afirmativo, obtenga la ecuación cartesiana de la recta tangente a C en dicho punto.

SOLUCIÓN.

El punto P pertenece a C si para un mismo valor del parámetro t en las ecuaciones paramétricas de C pueden obtenerse las coordenadas de P. Para ver si se cumple esto, sustituimos el valor de $x=4$ en la primera ecuación:

$$4=-4t^2+5; \qquad 4t^2=1; \qquad t^2=\frac{1}{4}; \qquad t=\pm\frac{1}{2}$$

Ahora, para $t=\frac{1}{2}$ en la segunda ecuación:

$y=2\,sen\frac{\pi}{2}=2$ la satisface.

Sin embargo, para $t=-\frac{1}{2}$, $\qquad y=2\,sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2$ no cumple.

De manera que P sí pertenece a C y se obtienen las coordenadas del punto para $t=\frac{1}{2}$.

Para la determinación de la ecuación cartesiana de la recta tangente es necesario obtener su pendiente; es decir:

$$m=D_x y\big]_P$$

Como la curva está expresada en forma paramétrica, se tiene que:

$$D_x y=\frac{D_t y}{D_t x}$$

$$D_t y=2\pi\cos\pi t\ , \qquad D_t x=-8t$$

$$\therefore \quad D_x y=\frac{2\pi\cos\pi t}{-8t}, \qquad m=-\frac{\pi\cos{\pi}/{2}}{4\left(\frac{1}{2}\right)}=0$$

La recta tangente es horizontal y su ecuación es $y=2$

CONCEPTO PRINCIPAL: Aplicaciones geométricas de la derivada. Ecuación de la recta tangente a una curva.

CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental**:** operaciones fundamentales. Trigonometría: valor de las funciones trigonométricas. Geometría analítica plana: Ecuación de la recta en su forma punto pendiente. Cálculo diferencial: derivación de funciones expresadas paramétricamente.

EJERCICIO 3.11. Obtenga $\frac{dy}{dx}$ para la función implícita

$sen\, xy^3 + \cos x^3 y = xy$

SOLUCIÓN.

$$\left(\cos xy^3\right)\left(3xy^2 y' + y^3\right) - \left(sen\, x^3 y\right)\left(x^3 y' + 3x^2 y\right) = xy' + y$$

$$3xy^2 y' \cos xy^3 + y^3 \cos xy^3 - x^3 y'\, sen\, x^3 y - 3x^2 y\, sen\, x^3 y = xy' + y$$

$$3xy^2 y' \cos xy^3 - x^3 y'\, sen\, x^3 y - xy' = y - y^3 \cos xy^3 + 3x^2 y\, sen\, x^3 y$$

$$y'\left(3xy^2 \cos xy^3 - x^3 sen\, x^3 y - x\right) = y - y^3 \cos xy^3 + 3x^2 y\, sen\, x^3 y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - y^3 \cos xy^3 + 3x^2 y\, sen\, x^3 y}{3xy^2 \cos xy^3 - x^3 sen\, x^3 y - x}$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Derivación de funciones expresadas en forma implícita..
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental**:** operaciones fundamentales. Cálculo diferencial: Derivada de la adición, producto y cociente de funciones, derivada de una función elevada a una potencia racional.

EJERCICIO 3.12. Determine la diferencial de arco para la función

$$x = -\tan\theta$$

$$y = \sec\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

SOLUCIÓN.

$$dx = -\sec^2\theta\, d\theta$$
$$dy = \sec\theta \tan\theta\, d\theta$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\sec^4 \theta + \sec^2 \tan^2 \theta\right) d^2\theta} =$$

$$= \sqrt{\sec^2 \theta \left(\sec^2 \theta + \tan^2 \theta\right)}\, d\theta =$$

$$= \sec\theta \sqrt{\sec^2 \theta + \tan^2 \theta}\, d\theta$$

Además, $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$

$$\therefore \quad ds = \sec\theta \sqrt{\sec^2 \theta + \sec^2 \theta - 1}\, d\theta =$$

$$= \sec\theta \sqrt{2\sec^2 \theta - 1}\, d\theta$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Concepto de diferencial de una función. Aplicaciones de la diferencial. Diferencial de arco.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental**:** operaciones fundamentales, radicales. Trigonometría: identidades trigonométricas pitagóricas. Cálculo diferencial: Derivada de la adición, producto y cociente de funciones, derivada de una función elevada a una potencia racional, derivada de funciones trigonométricas, derivada de una función expresada en forma paramétrica.

TEMA 4
VARIACIÓN DE FUNCIONES

EJERCICIO 4.1. Determine si la función f, tal que $f:\{x \mid x \in R; \quad y=-x^2+6x-5\}$ cumple con las hipótesis del teorema de Weierstrass en el intervalo $[1,4]$. En caso afirmativo, obtenga los valores máximo absoluto y mínimo absoluto que menciona el teorema.

SOLUCIÓN.

La función cumple con ser continua en el intervalo señalado por ser polinomial, por lo que satisface las hipótesis del teorema. Para la obtención de los valores solicitados, observemos que la curva representativa de f es un segmento de parábola, de manera que completando cuadrados:

$$y=-x^2+6x-5=$$

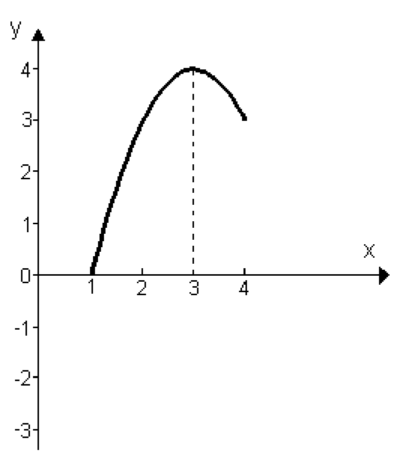
$$=-(x^2-6x+9)-5+9=$$

$$=-(x-3)^2+4$$

por lo que, en su forma canónica:

$$(x-3)^2=-(y-4)$$

Su representación gráfica es:



Entonces, el máximo absoluto se tiene para $x=3$; es decir en el vértice. Para ese valor de la abscisa $y=4$.

El mínimo absoluto está en $x = 1$ y vale $y = 0$.

CONCEPTO PRINCIPAL: Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Weierstrass.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental**:** operaciones fundamentales. Completar cuadrados. Geometría analítica plana: la parábola.

EJERCICIO 4.2 Sea la función $f : R \to R$., continua en $a \le x \le b$, con regla de correspondencia $y = f(x)$, y sea $x_0 \in [a, b]$. Relacione las columnas anotando en el paréntesis de la izquierda la letra de la opción de la derecha, de tal manera que se cumplan las características que describen a cada caso:

f en x_0

1 es creciente y cóncava hacia arriba ( )

2 tiene un mínimo relativo ( )

3 tiene un máximo absoluto ( )

4 tiene un punto de inflexión ( )

5 es decreciente y cóncava hacia arriba ( )

$A)\ f'(x_0) < 0$
$\quad f''(x_0) < 0$
$B)\ f(x_0) \ge f(x)\ \forall\ x \in [a, b]$
$C)\ f'(x_0) < 0$
$\quad f''(x_0) > 0$
$D)\ f'(x_0)\, no\ existe$
$\quad f''(x_0) > 0$
$E)\ f'(x_0) = 0$
$\quad f''(x_0) < 0$
$F)\ f(x_0) \le x\ \forall\ x \in [a, b]$
$G)\ f'(x_0) = 0$
$\quad f''(x_0) > 0$
$H)\ f'(x_0) = 0$
$\quad f''(x_0) = 0$
$I)\ f'(x_0) < 0$
$\quad f''(x_0) = 0$
$J)\ f''(x_0) = 0$
$\quad f'''(x_0) \ne 0$
$K)\ f'(x_0) > 0$
$\quad f''(x_0) > 0$

SOLUCIÓN.

1) (K)
2) (G)
3) (B)

4) (J)
5) (C)

CONCEPTO PRINCIPAL: Funciones crecientes y decrecientes y su relación con el signo de la derivada. Máximos y mínimos relativos. Criterio de la primera derivada. Concavidad y puntos de inflexión. Criterio de la segunda derivada.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Lectura razonada. Comprensión de teoremas.

EJERCICIO 4.3 Sea la función $f: R \to R$. una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). En cada caso seleccione la opción que complete correctamente la afirmación:

1) f tiene un máximo relativo en $x_0 \in (a, b)$ si ( )

$A)$ $f'(x_0) > 0$
$f''(x \ ) > 0$

$B)$ $f'(x_0) = 0$
$f''(x_0) > 0$

$C)$ $f'(x_0) = 0$
$f''(x_0) < 0$

$D)$ $f'(x_0) < 0$
$f''(x_0) < 0$

2) f tiene un punto de inflexión en $x_0 \in (a, b)$ si ( )

$A)$ $f''(x_0) = 0$
$[f''(x_0 - \delta)][f''(x_0 + \delta)] < 0; \quad \delta \to 0$

$B)$ $f''(x_0) = 0$
$f'''(x_0) = 0$

$C)$ $f''(x_0) < 0$
$f'''(x_0) = 0$

$D)$ $f''(x_0) = 0$
$[f''(x_0 - \delta)][f''(x_0 + \delta)] > 0; \quad \delta \to 0$

3) f es creciente y cóncava hacia abajo en $x_0 \in (a, b)$ si ( )

$A)$ $f'(x_0) > 0$
$f''(x_0) < 0$

$B)$ $f'(x_0) > 0$
$f''(x_0) > 0$

$C)$ $f'(x_0) < 0$
$f''(x_0) > 0$

$D)$ $f'(x_0) < 0$
$f''(x_0) < 0$

4) f tiene un mínimo absoluto en $x_0 \in [a,b]$ si ( )

$A)\ x \le x_0\ \forall\ x \in [a,b]$

$B)\ f(x) \le f(x_0)\ \forall\ x \in [a,b]$

$C)\ f(x) \le f(x_0)\ \forall\ x \in [a,b]$

$D)\ x \ge x_0\ \forall\ x \in [a,b]$

5) f es decreciente y cóncava hacia arriba en $x_0 \in (a,b)$ si ( )

$A)\ f'(x_0) > 0$
$\quad f''(x_0) > 0$

$B)\ f'(x_0) > 0$
$\quad f''(x_0) < 0$

$C)\ f'(x_0) < 0$
$\quad f''(x_0) > 0$

$D)\ f'(x_0) < 0$
$\quad f''(x_0) < 0$

SOLUCIÓN.

1) (C)

2) (A)

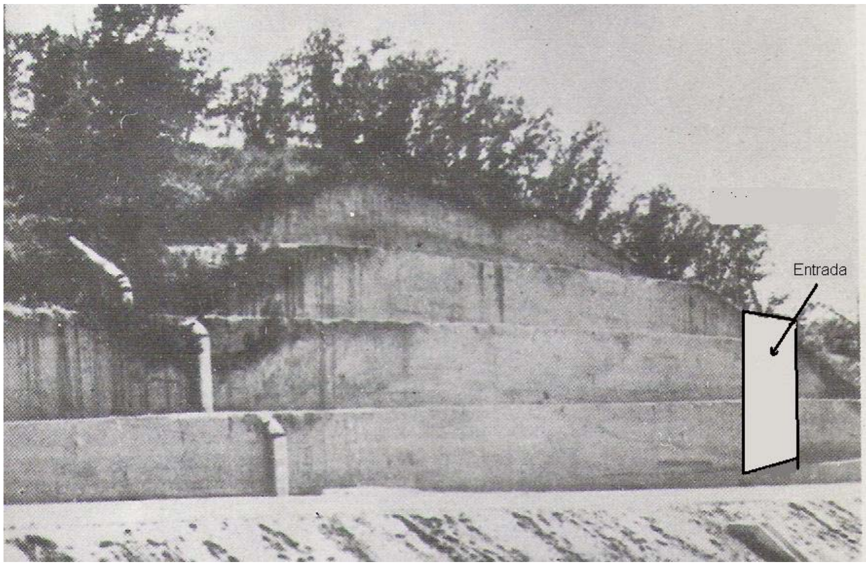
3) (A)

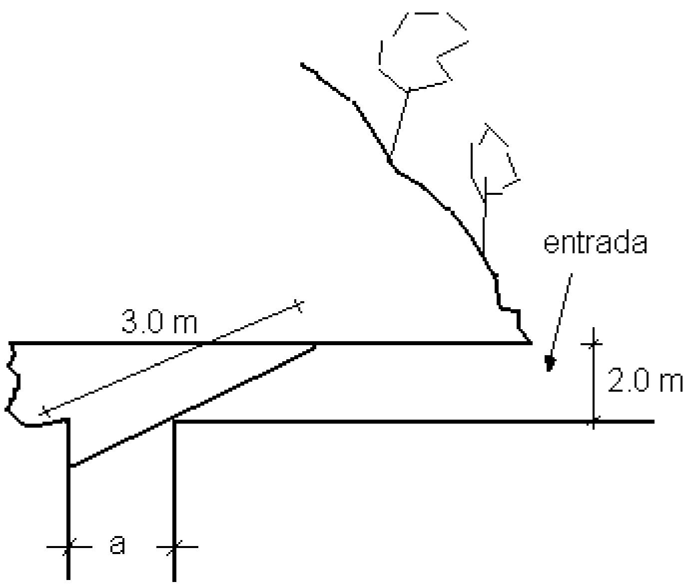
4) (B)

5) (C)

CONCEPTO PRINCIPAL: Funciones crecientes y decrecientes y su relación con el signo de la derivada. Máximos y mínimos relativos. Criterio de la primera derivada. Concavidad y puntos de inflexión. Criterio de la segunda derivada.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Lectura razonada. Comprensión de teoremas.

EJERCICIO 4.4 A través del túnel de una mina, con altura de 2.0 m se introducirán piezas rectas estructurales prefabricadas, de 3.0 m de longitud. Para su descenso se hará una excavación vertical. ¿Cuál es el ancho mínimo a que debe tener esta excavación para que puedan introducirse estos miembros estructurales?



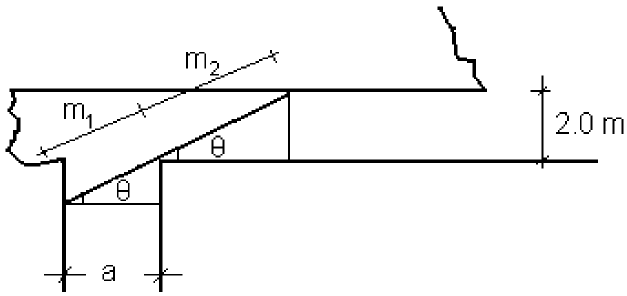


Detalle del túnel y un miembro estructural.

SOLUCIÓN.

Éste es un curioso ejercicio en el que para determinar el ancho *mínimo* de la excavación, es necesario encontrar el valor *máximo* de la longitud m_1 de la parte posterior de la pieza estructural para que ésta pueda girar y, por lo mismo, el ancho a máximo para que gire la pieza. Este ancho máximo para el giro nos conduce el ancho mínimo de la excavación para ser el más económico:

Para el planteamiento del problema y la aplicación de la teoría, conviene analizar los dos triángulos rectángulos que se forman:



De esta última figura se tiene:

$$\cos\theta = \frac{a}{m_1}; \quad m_1 = \frac{a}{\cos\theta}$$

$$sen\,\theta = \frac{2}{m_2}; \quad m_2 = \frac{2}{sen\,\theta}$$

Pero $m_1 + m_2 = 3 = \frac{a}{\cos\theta} + \frac{2}{sen\,\theta}$

Entonces:

$$\frac{a}{\cos\theta} = 3 - \frac{2}{sen\,\theta}$$

$$\therefore \quad a = 3\cos\theta - 2\,sen\,\theta \quad \cdots \quad (1)$$

Al derivar con respecto a θ:

$$\frac{da}{d\theta} = -3\,sen\,\theta + 2\cos\theta$$

igualando a cero:

$$-3\,sen\,\theta + 2\csc\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 3\,sen\,\theta = \frac{2}{sen^2\theta}$$

$$\therefore \quad sen^3\theta = \frac{2}{3}; \qquad sen\,\theta = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 0.8736$$

Como $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$; $\qquad \cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$

$$\cos\theta = \sqrt{1-(0.8736)^2} \approx 0.4866$$

Se considera el valor positivo de la raíz puesto que el ángulo θ debe ser agudo.

Al sustituir estos valores en la ecuación (1):

$$a = 3(0.4866) - \frac{2(0.4866)}{0.8736} \approx 0.3458$$

Es decir, con un ancho de 35 centímetros (redondeando), se puede asegurar que los miembros estructurales podrán girar y así la excavación será más económica.

CONCEPTO PRINCIPAL: Máximos y mínimos relativos. Problemas de aplicación.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Geometría euclidiana: triángulos semejantes. Trigonometría: razones trigonométricas, identidades pitagóricas. Álgebra elemental: fracciones, exponentes y radicales. Cálculo diferencial: formulación de funciones.

EJERCICIO 4.5 Sea la función f con regla de correspondencia $y = 2x^2 - 8x + 12$, definida en el intervalo $[-1, 3]$. Esta función, por ser polinómica, es continua y derivable en dicho intervalo.

a) Compruebe que el valor $a = 6$ está comprendido entre el mínimo absoluto y el máximo absoluto, valores que asegura su existencia el teorema de Bolzano;
b) Determine para qué valores de x se cumple el teorema mencionado;
c) Compruebe que para uno de los valores obtenidos de x en el inciso b, se satisface el teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial (teorema de Cauchy).

SOLUCIÓN.

Como f es continua en el intervalo $[-1, 3]$, se satisface la hipótesis del teorema de Bolzano. Para obtener el mínimo y el máximo absolutos, observamos que la representación gráfica de f es el segmento de una parábola. Conviene llegar a la forma canónica de su ecuación, para ello aplicamos el método de completar cuadrados:

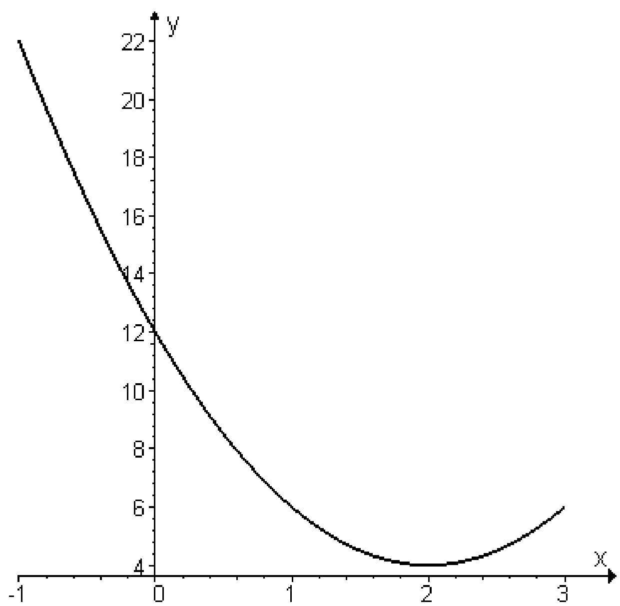
$$y = 2x^2 - 8x + 12 =$$

$$= 2\left(x^2 - 4x + 4\right) + 12 - 8 =$$

$$= 2\left(x - 2\right)^2 + 4$$

$$\therefore \quad \left(x - 2\right)^2 = \frac{1}{2}\left(y - 4\right)$$

Su gráfica, esquemáticamente, es:



De manera que el mínimo absoluto se tiene en el vértice, $m = 4$; mientras que el máximo absoluto está en el extremo izquierdo, $M = 22$. Por ello se tiene que $a = 6$ sí está comprendido entre estos dos valores. Con ello se responde al inciso a.

Ahora, para el inciso b, al sustituir $y = a = 6$ en la regla de correspondencia de la función:

$$6 = 2x^2 - 8x + 12$$

Ordenando y dividiendo entre dos:

$$x^2-4x+6=3$$

$$x^2-4x+3=0$$

$$(x-1)(x-3)=0$$

De manera que los valores que satisfacen el teorema de Bolzano son:

$$x_1=1, \qquad x_2=3$$

Finalmente, para el inciso c, recordemos que el teorema de Cauchy establece que:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(x_0)$$

$$f(x_1)=2(-1)^2-8(-1)+12=22$$

$$f(x_2)=2(3)^2-8(3)+12=6$$

Por otra parte:

$$f'(x)=4x-8$$

$$\therefore \quad \frac{6-22}{3-(-1)}=4x_0-8$$

$$\frac{-6}{4}=4x_0-8$$

$$x_0=1$$

Con lo que se comprueba que para este valor se cumplen simultáneamente los dos teoremas.

CONCEPTO PRINCIPAL: Teorema de Bolzano, teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Geometría analítica plana: la parábola. Álgebra elemental: completar cuadrados, factorización.

EJERCICIO 4.6 Sea la función f, con reglas de correspondencia:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x-1, & -3\le x\le -1 \\ x-2, & -1<x\le 5 \\ -x^2+11x-27, & 5<x\le \dfrac{11+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Determine si se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle y, en caso afirmativo, obtenga las coordenadas del o los puntos en donde se satisface la tesis de dicho teorema.

SOLUCIÓN.

i) f es continua y derivable en los intervalos $(-3,-1)$, $(-1,5)$ y $\left(5,\dfrac{11+\sqrt{17}}{2}\right)$ por tener reglas de correspondencia polinómicas.

ii) Para los valores -3 y $\dfrac{11+\sqrt{17}}{2}$ se tiene que

$$f(-3)=\lim_{x\to -3^+} f(x)$$

$$f\left(\frac{11+\sqrt{17}}{2}\right)=\lim_{x\to \frac{11+\sqrt{17}}{2}^{-}} f(x)$$

por lo que es continua en esos valores.

iii) Para x=-1:

$$f(-1)=(-1)^2+3(-1)-1=-3$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=-3, \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x)=(-1)-3=-3 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to -1} f(x)=-3$$

$f(-1)=\lim_{x\to -1} f(x)$ la función es continua en ese valor.

Además $f'_-(-1)=2x+3\big]_{-1}=1, \qquad f'_+(-1)=1$

f es continua y derivable en x=-1.

Ahora para x=5:

$f(5) = 5 - 2 = 3$

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 3, \qquad \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = -(5)^2 + 11(5) - 27 = 3 \qquad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 5}(x) = 3$

$f(5) = \lim\limits_{x\to 5} f(x) = 3$

f es continua en ese punto.

Por otra parte:

$f'_-(5) = 1, \qquad f'_+(5) = -2(5) + 11 = 1$

La función es continua y derivable en x=5; por lo tanto se puede afirmar que f es continua en $\left[-3, \dfrac{11+\sqrt{17}}{2}\right]$ y derivable en $\left(-3, \dfrac{11+\sqrt{17}}{2}\right)$.

iv)

$f(-3) = (-3)^2 + 3(-3) - 3 = -1$

$$f\left(\frac{11+\sqrt{17}}{2}\right) = -\left(\frac{11+\sqrt{17}}{2}\right)^2 + 11\left(\frac{11+\sqrt{17}}{2}\right) - 27 =$$

$$= \frac{-(121+22\sqrt{17}+17}{4} + \frac{121+11\sqrt{17}}{2} - 27 =$$

$$= -\frac{121}{4} + \frac{121}{2} - \frac{17}{4} - 27 =$$

$$= 26 - 27 = -1$$

$$\therefore \quad f(-3) = f\left(\frac{11+\sqrt{17}}{2}\right) = -1$$

Esto significa que se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle.

Ahora, para determinar los puntos donde se cumple la tesis del teorema:

Intervalo $(-1, 5)$:

$$f'(x) = 2x + 3 \qquad 2x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{3}{2}$$

Intervalo $(-1, 5)$:

$f'(x) = 1$ en este intervalo no hay valores donde se cumpla.

Intervalo $\left(5, \dfrac{11+\sqrt{17}}{2}\right)$:

$$f'(x) = -2x + 11, \qquad -2x + 11 = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = \frac{11}{2}$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Teorema de Rolle.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra: polinomios. Cálculo diferencial: límites y continuidad. Derivadas laterales.

EJERCICIO 4.7 En una compañía armadora de automóviles se tiene que las utilidades diarias son función del número de unidades terminadas, de acuerdo con:

$$p(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & 0 \le x \le 50 \\ -3x^2 + 204x, & x > 50 \end{cases}$$

donde x es el número de unidades terminadas.

¿Cuál debe ser el número terminado de unidades para tener la utilidad máxima?

SOLUCIÓN.

Para la primera regla de correspondencia se tiene:

$$p'(x) = 2x + 4, \qquad 2x + 4 = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = -2$$

por lo que se tiene que no hay puntos críticos en el intervalo $(0, 50)$.

Ahora para la segunda regla de correspondencia:

$$p'(x) = -6x + 204, \qquad -6x + 204 = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = 34$$

tampoco existen puntos críticos en el intervalo $x > 50$

El único punto crítico podría ser para $x = 50$

Primero comprobemos si hay continuidad:

$p(50) = (50)^2 + 4(50) = 2700$

$\lim\limits_{x \to 50^-} p(x) = (50)^2 + 4(50) = 2700$

$\lim\limits_{x \to 50^{-+}} p(x) = -3(50)^2 + 204(50) = 2700$

por lo que $\lim\limits_{x \to 50} p(x) = 2700 = p(50)$

Hay continuidad para ese valor.

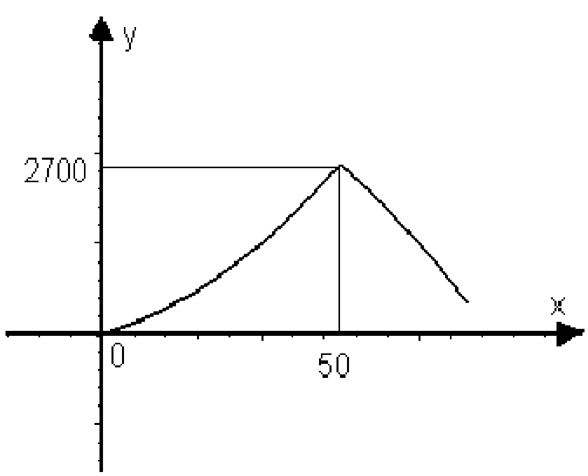
Por otra parte, $p'_-(50) = 2(50) + 4 = 104 > 0$

$p'_+(50) = -6(50) + 204 = -696 < 0$

Como se observa, p no es derivable en ese punto pero la derivada cambia de positiva a negativa, por ello se tiene el máximo buscado y es

$p(50) = 2700$ unidades terminadas.

Una figura esquemática (fuera de escala) es:



CONCEPTO PRINCIPAL: Máximos y mínimos relativos. Problemas de aplicación.

CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Cálculo diferencial: Límites y continuidad. Derivada de una función elevada a un exponente racional.

EJERCICIO 4.8 Sea la función $f : R \to R$ tal que

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$$

Determine sus extremos absolutos, sus extremos relativos, los intervalos dónde f es creciente, dónde es decreciente; sus puntos de inflexión y dónde su concavidad es hacia arriba o hacia abajo.

SOLUCIÓN.

El dominio de f es el conjunto de los reales, por tratarse de una función polinómica. Por otra parte, por esta misma razón, f es continua y derivable en todo su dominio.

Para el análisis de la variación de la función, calculemos:

PRIMERA DERIVADA:

$f'(x) = 4x^3 - 16x$, $\qquad 4x^3 - 16x = 0$, $\qquad 4x\left(x^2 - 4\right) = 0$

$\therefore x_1 = -2, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 2$

SEGUNDA DERIVADA:

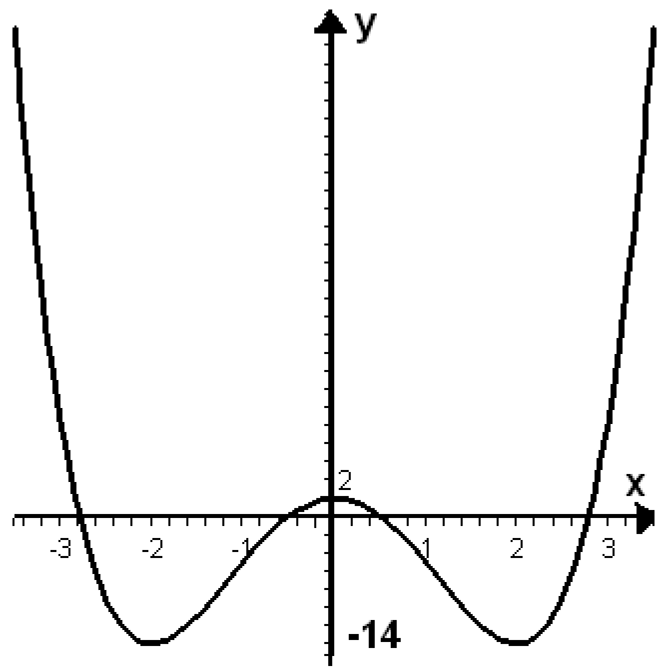
$f''(x) = 12x^2 - 16$, $\qquad 12x^2 - 16 = 0$, $\qquad x = \pm \dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx \pm 1.15$

$x_4 = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \qquad x_5 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Las conclusiones se presentan en la tabla siguiente:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0		$-$		0	$+$	
$f''(x)$			$+$		0		$-$		0		$+$		
$f(x)$	$+\infty$		-14		$-\frac{2}{9}$		2		$-\frac{2}{9}$		-14		$+\infty$

Y la representación gráfica, fuera de escala, de la función se tiene:



CONCEPTO PRINCIPAL: Análisis de la variación de una función.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental: Factorización. Resolución de ecuaciones de segundo grado. Cálculo diferencial: Derivación de una función elevada a una potencia. Extremos relativos. Puntos de inflexión. Funciones crecientes y decrecientes. Concavidad de una función.

TEMA 5
SUCESIONES Y SERIES

EJERCICIO 5.1. Sea la sucesión:

$$S = \{f(n)\}$$

donde $$f(n) = \frac{(n^2 + 3n)\,sen\left(\pi/n\right) + 2\pi n^2 + 6\pi n}{(n^3 + 3n^2)\,sen\,\pi/n}$$

Determine si es acotada.

SOLUCIÓN.

Se tiene que si $\underset{n\to\infty}{lím}\, f(n)$ existe, la sucesión es acotada.

Por lo que:

$$\underset{n\to\infty}{lím} \frac{(n^2 + 3n)\,sen\,\pi/n + 2\pi n^2 + 6\pi n}{(n^3 + 3n^2)\,sen\,\pi/n} =$$

$$= \underset{n\to\infty}{lím} \frac{(n^2 + 3n)\,sen\,\pi/n}{(n^3 + 3n^2)\,sen\,\pi/n} + \underset{n\to\infty}{lím} \frac{2\pi n^2 + 6\pi n}{(n^3 + 3n^2)\,sen\,\pi/n} =$$

$$= \underset{n\to\infty}{lím} \frac{1}{n} + \underset{n\to\infty}{lím} \frac{2\pi}{n\,sen\,\pi/n} =$$

$$= \underset{n\to\infty}{lím} \frac{1}{n} + \underset{n\to\infty}{lím} \frac{2\,\pi/n}{n\,sen\,\pi/n}$$

Pero $\underset{n\to\infty}{lím} \frac{1}{n} = 0$, $\quad \underset{n\to\infty}{lím} \frac{\pi/n}{sen\,\pi/n} = \underset{n\to 0}{lím} \frac{a}{sen\,a} = 1$, si $a = \frac{\pi}{n}$

Finalmente, $\underset{n\to\infty}{lím}\, f(n) = 2$, por lo que la sucesión es acotada.

CONCEPTO PRINCIPAL: Definición de sucesión. Límite y convergencia de una sucesión. Sucesiones monótonas y acotadas.

CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental**:** Fracciones. Cálculo diferencial: Cálculo de límites cuando la variable tiende al infinito. Cálculo del límite de sen x/ x cuando x tiende a cero.

EJERCICIO 5.2. Sea la sucesión:

$$F = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots\}$$

conocida como la sucesión de Fibonacci, la cual tiene la característica de que cada elemento n se obtiene como la suma de los dos anteriores, teniendo como elementos iniciales el cero y el uno; es decir $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = f(0) + f(1)$, etcétera.
Esta sucesión es divergente; sin embargo, existe un límite muy interesante llamado *la "razón dorada"*, conocida en el arte, el diseño gráfico y en muchos otros ámbitos. Por otra parte, se tiene como dato que:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \text{ para } n = 0, 1, 2, \cdots$$

Obtenga la razón dorada expresada como:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)}$$

SOLUCIÓN.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}\right]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}} =$$

pero $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n} = 0$ ya que $\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 1$; entonces:

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Definición de sucesión. Límite y convergencia de una sucesión. Sucesiones monótonas y acotadas.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra elemental**:** Fracciones. Factorización. Cálculo diferencial: Cálculo de límites cuando la variable tiende al infinito.

EJERCICIO 5.3. Determine el carácter de la serie:

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+4n^2}$$

SOLUCIÓN.

Se trata de una serie de términos positivos, por lo que es aplicable el criterio de comparación. Si se emplea como serie de comparación:

$c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que es una serie “p” convergente, debe cumplirse:

$$\frac{n^2+1}{n^4+4n^2} < \frac{1}{n^2} \quad \forall \quad n \in N$$

Se pueden multiplicar ambos lados de la desigualdad por $\left(n^4+4n^2\right)\left(n^2\right)$ sin alterar el sentido puesto que ambos factores son positivos, resultando:

$$n^4+n^2 < n^4+4n^2$$

Como sí se cumple esta desigualdad, se concluye que a es convergente.

CONCEPTO PRINCIPAL: Series de términos positivos. Criterio de comparación.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra: desigualdades. Cálculo diferencial: serie "p".

EJERCICIO 5.4. Determine el carácter de la serie:

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(3n-2)!}$$

SOLUCIÓN.

Por ser una serie de términos positivos, es aplicable el criterio de D'Alembert o del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{[2(n+1)+1]!}{[3(n+1)-2]!}}{\dfrac{(2n+1)!}{(3n-2)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(2n+3)!}{(3n+1)!}}{\dfrac{(2n+1)!}{(3n-2)!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)! \quad (3n-2)!}{(2n+1)! \quad (3n+1)(3n)(3n-1)(3n-2)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(2n+2)}{(3n+1)(3n)(3n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+10n+6}{27n^3-3n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n}+\frac{10}{n^2}+\frac{6}{n^3}}{27-\frac{3}{n^2}} = \frac{0}{27} = 0$$

Como $0<1$, la serie B es convergente.

CONCEPTO PRINCIPAL: Series de términos positivos. Criterio del cociente o de D'Alembert.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra: Fracciones, factorial. Cálculo diferencial: Cálculo de límites cuando la variable tiende al infinito.

EJERCICIO 5.5. Sea la serie:

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{10^n}$$

con sucesión de sumas parciales:

$S = \{f(n)\}$, donde $f(n) = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

Determine si la serie σ converge y, si es el caso, calcule su suma.

SOLUCIÓN.

Como se conoce el término general de la sucesión de sumas parciales de la serie, aplicando el teorema correspondiente se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3\bullet 10^n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3} - \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3\bullet 10^n} = \frac{2}{3}$$

Como el límite existe, la serie σ converge y el valor de su suma es precisamente $\frac{2}{3}$.

CONCEPTO PRINCIPAL: Definición de serie. Convergencia de una serie. Propiedades y condiciones para la convergencia.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra: Fracciones. Cálculo diferencial: Cálculo de límites cuando la variable tiende al infinito.

EJERCICIO 5.6. Determine el carácter de la serie:

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(n-2)!}{\left(n^2+2\right)\,n\,!}$$

SOLUCIÓN.

Se trata de una serie de signos alternados. Antes de aplicar el criterio de Leibniz conviene simplificar el término general de la serie:

$$\frac{(-1)^n\,(n-2)!}{\left(n^2+2\right)\,n\,!}=\frac{(-1)^n\,(n-2)!}{\left(n^2+2\right)\,n\,(n-1)\,(n-2)!}=$$

$$=\frac{(-1)^n}{\left(n^2+2\right)(n)\,(n-1)}=\frac{(-1)}{n^4-n^3+2n^2-2n}$$

O sea:

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,(n-2)!}{\left(n^2+2\right)\,n\,!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4-n^3+2n^2-2n}$$

De acuerdo con el criterio de Leibniz, debe cumplirse que:

i) $$\frac{1}{n^4-n^3+2n^2-2n}>\frac{1}{(n+1)^4-(n+1)^3+2\,(n+1)^2-2\,(n+1)}$$

Es decir:

$$(n+1)^4-(n+1)^3+2\,(n+1)^2-2\,(n+1)>n^4-n^3+2n^2-2n$$

Al desarrollar y simplificar:

$$n^4+3n^3+5n^2+3n>n^4-n^3+2n^2-2n$$

Que, evidentemente, se cumple.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^4 - n^3 + 2n^2 - 2n}$ debe valer cero.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4 - n^3 + 2n^2 - 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n^4}}{1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2} - \dfrac{2}{n^3}} = 0$$

También se cumple, por lo que la serie L es convergente.

CONCEPTO PRINCIPAL: Series de signos alternados. Criterio de Leibniz.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra: Fracciones, factorial. Cálculo diferencial: Cálculo de límites cuando la variable tiende al infinito.

EJERCICIO 5.7. Determine el carácter de la serie:

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \left(-1^{n+1} n^3\right)}{n^3 + 4}$$

SOLUCIÓN.

La serie Ω puede escribirse como la suma de dos series:

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 4} + \sum \frac{(-1)^{n+1} n^3}{n^3 + 4}$$

La primera es una serie de términos positivos y la segunda, de signos alternados.

Para la primera. Con el criterio de comparación, utilizando para ello la serie convergente:

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Debe cumplirse:

$$\frac{n}{n^3 + 4} < \frac{1}{n^2} \quad \forall\, n \in N$$

Como n es un número natural cualquiera, siempre es positivo, por lo que puede multiplicarse en ambos miembros de la desigualdad por $\left(n^3+4\right)\left(n^2\right)$ sin que se modifique su sentido:

$n^3 < n^3 + 4$ lo cual, evidentemente se cumple, por lo que el primer sumando de la serie Ω es una serie convergente.

Ahora, para la segunda serie, utilicemos el criterio de Leibniz.

Debe cumplirse:

i) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+4} = 0$

Al calcular el límite:

$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+4/n^3} = 1 \neq 0$, por lo que ya no es necesario continuar con el análisis para determinar que esta segunda serie diverge y, por lo tanto Ω también es una serie divergente.

CONCEPTO PRINCIPAL: Definición y propiedades de las operaciones con series.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra: Fracciones. Cálculo diferencial: Cálculo de límites cuando la variable tiende al infinito. Criterio de comparación. Criterio de Leibniz.

EJERCICIO 5.8. Obtenga la serie de Taylor para la función $f: R \to R$ con regla de correspondencia $f(x) = \frac{1}{x}$ alrededor del valor $x_0 = 1$. Además determine su intervalo de convergencia.

SOLUCIÓN.

$f(x) = \frac{1}{x}$, $\qquad f(1) = 1$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\qquad f'(1) = -1$

$f''(x) = \frac{2\bullet 1}{x^3}$, $\qquad f''(1) = 2!$

$$f'''(x) = -\frac{3\bullet 2\bullet 1}{n^4} \quad , \qquad f'''(1) = -3\,!$$

$$f^{(iv)}(x) = \frac{4\bullet 3\bullet 2\bullet 1}{x^5} \quad , \qquad f^{(iv)}(1) = 4\,!$$

En general:

$$f^{(n)} = (-1)^n \frac{n\,!}{x^{n+1}} \quad , \qquad f^{(n)}(1) = (-1)^n \; n\,!$$

Por lo que la serie queda:

$$\frac{0\,!}{0\,!}(x-1)^0 - \frac{1\,!}{1\,!}(x-1)^1 + \frac{2\,!}{2\,!}(x-1)^2 - \frac{3\,!}{3\,!}(x-1)^3 + \frac{4\,!}{4\,!}(x-1)^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x-1)^n$$

Para el cálculo de su intervalo de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{(x-1)^n}\right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty}|x-1| < 1, \qquad \Rightarrow \quad |x-1| < 1$$

Al resolver la desigualdad se tiene:

$$0 < x < 2$$

Análisis de los extremos.

Para $x = 0$:

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-1)^n$, aplicando una de las leyes de los exponentes:

$\sum_{n=0}^{\infty}(1)$ que es una serie divergente pues , aplicando la prueba de la divergencia se tiene que $\lim_{n\to\infty} 1 \neq 0$

Para $x = 2$:

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2-1)^n$ que también diverge puesto que $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ no existe.

El intervalo de convergencia es, entonces: $I=\{x \mid \quad x\in(0,2)\}$

CONCEPTO PRINCIPAL: Desarrollo de funciones en series de potencias. Serie de Taylor.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra: Fracciones, factorial, leyes de los exponentes. Cálculo diferencial: Derivada de un cociente. Cálculo de límites cuando la variable tiende al infinito. Prueba de la divergencia.

EJERCICIO 5.9. Obtenga los tres primeros sumandos no nulos de la serie de Taylor para la función $f(x)=\tan x$, con centro en $x_0=0$

Por otra parte, con esos tres primeros sumandos de la serie calcule $\tan\frac{\pi}{4}$ y determine el error en porciento que se comete con este cálculo.

SOLUCIÓN.

$f(x)=\tan x$, $\qquad f(0)=0$

$f'(x)=\sec^2 x$, $\qquad f'(0)=1$

$f''(x)=2\sec^2 x\tan x$, $\qquad f''(0)=0$

$f'''(x)=2\sec^4 x+4\sec^2 x\tan^2 x$, $\qquad f'''(0)=2$

$f^{(iv)}(x)=8\sec^4 x\tan x+8\sec^4 x\tan x+8\sec^2 x\tan^3 x=$
$=16\sec^4 x\tan x+8\sec^2 x\tan^3 x$, $\qquad f^{(iv)}(0)=0$

$f^{(v)}(x)=16\sec^6 x+\cdots$ los otros términos de esta derivada contienen a $\tan x$ elevada a alguna potencia, por lo que al valuarla en $x_0=0$ se anulan. Entonces $f^{(v)}(0)=16$

Por lo que la serie con sus tres primeros sumandos no nulos queda:

$$\frac{1}{1!}x+\frac{2}{3!}x^3+\frac{16}{5!}x^5+\cdots=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots$$

Por otra parte, para $x=\frac{\pi}{4}$

$$\tan\frac{\pi}{4} \approx \frac{\pi}{4} + \frac{\left(\pi/4\right)^3}{3} + \frac{2\left(\pi/4\right)^5}{15} \approx 0.9867$$

Como $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, el error en porciento es:

$$e = \left(\frac{1 - 0.9867}{1}\right) \times 100 \approx 1.33\,\%$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Desarrollo de funciones en series de potencias. Serie de Taylor.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra: Fracciones, factorial, leyes de los exponentes. Trigonometría: Valores de las razones trigonométricas. Cálculo diferencial: Derivada de las funciones trigonométricas. Errores.

EJERCICIO 5.10. La serie de Taylor de una función es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n\left(n+5\right)}\left(x+1\right)^n$$

¿Cuál es su intervalo de convergencia?

SOLUCIÓN.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{\left(x+1\right)^{n+1}}{3^{n+1}\left(n+6\right)}}{\dfrac{\left(x+1\right)^n}{3^n\left(n+5\right)}}\right| < 1 \;; \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n\left(n+5\right)\left(x+1\right)^{n+1}}{3^{n+1}\left(n+6\right)\left(x+1\right)^n}\right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(x+1\right)\left(n+5\right)}{3\left(n+6\right)}\right| < 1 \;; \qquad \frac{1}{3}\left|x+1\right| \lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{n+6} < 1$$

$$\frac{1}{3}\left|x+1\right| \lim_{n\to\infty}\frac{1+5/n}{1+6/n} < 1 \;; \qquad \frac{1}{3}\left|x+1\right| < 1$$

$$\left|x+1\right| < 3 \;; \qquad -4 < x < 2$$

Análisis de los extremos:

Para $x=-4$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4+1)^n}{3^n(n+5)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+5}$

Como se trata de una serie de signos alternados, usemos el criterio de Leibniz. Debe cumplirse:

i) $\frac{1}{n+6} < \frac{1}{n+5}$; $n+5 < n+6$ que se cumple.

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+5} = 0$; $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1+5/n} = 0$ que también se cumple.

La serie converge.

Ahora para $x=2$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+1)^n}{3^n(n+5)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+5}$

Esta serie, por extensión puede escribirse como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots$$

Como puede observarse, resulta igual a la llamada serie armónica, suprimiéndole cuatro términos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots$$

La serie armónica es divergente y un teorema afirma que el carácter de una serie no se modifica si se le agregan o se le suprimen un número finito de términos y como la serie armónica es divergente, la serie en estudio también diverge.

La conclusión es que el intervalo de convergencia es $-4 \le x < 2$

CONCEPTO PRINCIPAL: Series de potencias. Intervalo de convergencia.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra: Fracciones, leyes de los exponentes, desigualdades. Cálculo diferencial: Cálculo de límites cuando la variable tiende al infinito. Teoremas sobre series. La serie armónica o serie “p” para p=1.

EJERCICIO 5.11. Determinar el intervalo de convergencia, incluyendo los extremos, para la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n (n+4)^2}$$

SOLUCIÓN.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}(n+5)^2}}{\frac{(x-3)^n}{2^n (n+4)^2}} \right| < 1; \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1} 2^n (n+4)^2}{(x-3)^n 2^{n+1} (n+5)^2} \right| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-3)(n+4)^2}{2\,(n+5)^2} \right| < 1; \qquad \frac{|x+3|}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^2}{(n+5)^2} < 1;$$

$$|x-3| \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+8n+16}{n^2+10n+25} < 2; \qquad |x-3| \lim_{n\to\infty} \frac{1+\cancel{8/n}+\cancel{16/n^2}}{1+\cancel{10/n}+\cancel{25/n^2}} < 2;$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\cancel{8/n}+\cancel{16/n^2}}{1+\cancel{10/n}+\cancel{25/n^2}} = 1;$ $\qquad |x-3| < 2 \qquad \Rightarrow \quad 1 < x < 5$

ANÁLISIS DE LOS EXTREMOS:

Para x=1:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n (n+4)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2)^n}{2^n (n+4)^2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+4)^2}$$

Se trata de una serie de signos alternados, por lo que aplicaremos el criterio de Leibniz. De acuerdo con él, debe cumplirse:

i) $\frac{1}{[(n+1)+4]^2} < \frac{1}{(n+4)^2}$; es decir $\frac{1}{(n+5)^2} < \frac{1}{(n+4)^2}$

Al aplicar una de las propiedades de las desigualdades:

$(n+4)^2 < (n+5)^2$ que evidentemente se cumple para cualquier número natural.

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+4)^2}$ debe ser nulo.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+4)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{1/n^2}}{\cancel{1/n^2}\,(n+4)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{1/n^2}}{\left(1+\cancel{4/n}\right)^2} = 0$$, que también se cumple y, por lo tanto, la serie es convergente para ese extremo.

Ahora para x=5:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5-3)^n}{2^n (n+4)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n (n+4)^2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+4)^2}$$ ahora se trata de una serie de términos positivos. Para la determinación de su carácter y aplicando el criterio de comparación usaremos a la serie convergente:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que sabemos converge puesto que se trata de la serie "p" con $p=2$. Además, para el análisis suprimiremos el término inicial de la serie en estudio; es decir $a_0 = \frac{1}{16}$ el cual se obtiene para el valor de $n=0$, para que las dos series por comparar inicien con el mismo valor de $n=1$. Esto lo podemos hacer apoyándonos en el teorema que señala que si se agrega o se suprime un número finito de términos en una serie, su carácter no se modifica. De manera que debe cumplirse que:

$\frac{1}{(n+4)^2} < \frac{1}{n^2}$, lo cual evidentemente se cumple; por lo que la serie para este extremo también es convergente.

El intervalo de convergencia queda entonces:

$1 \le x \le 5$

CONCEPTO PRINCIPAL: Series de potencias. Intervalo de convergencia.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra: Fracciones, leyes de los exponentes, desigualdades. Cálculo diferencial: Cálculo de límites cuando la variable tiende al infinito. Teoremas sobre series. Criterio de comparación. Criterio de Leibniz. Serie $"p"$.

EJERCICIO 5.12. Sea la serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{4^n (n+2)!}$$

Determinar su intervalo de convergencia. Incluya en este estudio el análisis de los extremos del intervalo.

SOLUCIÓN.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(x-2)^{n+1}}{4^{n+1}(n+3)!}}{\dfrac{(x-2)^n}{4^n (n+2)!}} \right| < 1; \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}(n+2)!\,4^n}{(x-2)^n\,(n+3)!\,4^{n+1}} \right| < 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-2)(n+2)!}{4\,(n+3)(n+2)!} \right| < 1; \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x-2}{4(n+3)} \right| < 1;$$

$$\frac{|x-3|}{4} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+3} < 1;$$

Pero $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = 0$

Por lo que $\dfrac{|x-3|}{4} \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+3} = \dfrac{|x-3|}{4}(0) < 1;$ $\Rightarrow$ $0<1$ lo cual se cumple para cualquier valor de $x \in R$; por lo que el intervalo de convergencia es:

$-\infty < x < +\infty$.

El análisis de los extremos carece de sentido por tratarse del infinito.

CONCEPTO PRINCIPAL: Series de potencias. Intervalo de convergencia.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra: Fracciones, leyes de los exponentes, desigualdades, factorial y sus propiedades. Cálculo diferencial: Cálculo de límites cuando la variable tiende al infinito.

EJERCICIO 5.13. Para la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (n+2)!}{(n-5)^2}$$

Determine su intervalo de convergencia, incluyendo en esta determinación el análisis de los extremos.

SOLUCIÓN.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{x^{n+1}(n+3)!}{(n-4)^2}}{\dfrac{x^n (n+2)!}{(n-5)^2}} \right| < 1; \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}(n+3)!\,(n-5)^2}{x^n (n+2)!\,(n-4)^2} \right| < 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x\,(n+3)(n+2)!\,(n-5)^2}{(n+2)!\,(n-4)^2} \right| < 1; \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x\,(n+3)(n-5)^2}{(n-4)^2} \right| < 1;$$

$$|x| \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 10n^2 + 25n - 75}{n^2 - 8n + 16} < 1 \quad ;$$

Pero $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - 10n^2 + 25n - 75}{n^2 - 8n + 16} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - \dfrac{10}{n} + \dfrac{25}{n^2} - \dfrac{75}{n^3}}{\dfrac{1}{n} - \dfrac{8}{n^2} + \dfrac{16}{n^3}}$ no existe.

Por esta razón, la serie diverge para cualquier valor de $x \in R$

CONCEPTO PRINCIPAL: Series de potencias. Intervalo de convergencia.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Álgebra: Fracciones, leyes de los exponentes, desigualdades, factorial y sus propiedades. Cálculo diferencial: Cálculo de límites cuando la variable tiende al infinito.