GUÍA DE ESTUDIOS PARA PREPARAR EXAMEN EXTRAORDINARIO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Francisco Barrera García

PRESENTACIÓN

De acuerdo con los datos estadísticos de los índices de reprobación en asignaturas de Ciencia Básicas, la asignatura Geometría Analítica ha sido por muchos años la que encabeza la lista con el más alto índice de reprobación; razón por la cual, la División de Ciencias Básicas y el Departamento de Matemáticas Básicas, con el apoyo de las autoridades de nuestra Facultad, han instrumentado una serie de medidas que han coadyuvado a disminuir el problema de la reprobación en la asignatura, entre estas acciones podemos citar: el servicio de asesorías, los talleres de ejercicios, clases video grabadas, conferencias-clase y desde luego, la elaboración de obra escrita con dos libros de teoría publicados, uno de ellos por el autor de esta obra. En esta línea de trabajo, el Ing. Érik Castañeda De Isla Puga elaboró esta guía de estudios para preparar examen extraordinario de Geometría Analítica, en la cual, a diferencia de otras guías para exámenes extraordinario que han existido, se tiene un enfoque novedoso en el que se incluye cierta orientación al estudiante de cómo preparar un examen extraordinario, algunas recomendaciones para la presentación del examen, se señalan los conceptos principales y secundarios que pretenden ser evaluados en los reactivos presentados, así como los conceptos antecedentes requeridos para poder resolverlos. Cabe señalar que en esta guía todos los ejercicios están resueltos y la mayor parte de ellos son ejercicios originales diseñados por el autor de la obra.

Ing. Francisco Barrera García
Jefe del Departamento de Matemáticas Básicas
Febrero de 2006

GUÍA DE ESTUDIOS PARA PREPARAR EXAMEN EXTRAORDINARIO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

OBJETIVO.- El estudiante será capaz de presentar con éxito un examen extraordinario de la asignatura **Geometría Analítica,** correspondiente a los planes de estudio de la Facultad de Ingeniería.

GENERALIDADES.- La preparación de un examen extraordinario, de cualquier asignatura, representa un esfuerzo importante por parte del sustentante. Existen diferentes mitos sobre este tipo de exámenes que propician temores o comportamientos inadecuados para alcanzar el logro buscado. El más difundido trata de su grado de dificultad. Es lógico que un examen extraordinario tenga que abarcar, necesariamente, un extenso dominio del conocimiento. En cualquier otro tipo de examen, sea parcial o final; el profesor tiene otros elementos que permiten la correcta evaluación del alumno; mientras que los estudiantes que recurren a un extraordinario, ni siquiera tienen que ser conocidos por el profesor y el examen constituye el único elemento de juicio. Por ello, aunque es imposible preguntar absolutamente todo un curso, el cuestionario tiene que intentar abarcar la mayor parte de los conceptos relevantes de él. Esto de ninguna manera significa que los reactivos empleados se propongan deliberadamente con la intención de que sean **difíciles.** Por otra parte, también resulta natural pensar que el estudiante que utiliza este recurso **extraordinario**, en ocasiones lo hace después de un tiempo considerable de haber cursado la asignatura. Aunado a esto, en lo particular Geometría Analítica requiere para su comprensión de una abstracción importante, que en muchas ocasiones el alumno que ingresa apenas del bachillerato no ha alcanzado.

Ahora bien, con el objetivo de resolver estas dificultades, se propone lo siguiente:

Para el problema evocado en primer lugar, dado que la evaluación intenta cubrir todo el curso, el alumno que presentará un extraordinario debe organizar sus estudios y su tiempo para alcanzar un nivel adecuado de conocimientos. Es absurdo pensar que un examen extraordinario pueda prepararse con tan solo unos cuantos días de estudio. El tiempo de preparación debe estar en función de la parte del curso que se haya olvidado o que requiera estudio más profundo. Yo sugiero que el estudiante haga personalmente un diagnóstico de su situación. Para ello debe conseguir un programa vigente de Geometría Analítica. En él, con tres marcadores de diferentes colores, elegidos por él mismo, señalar los conceptos que requieren muy poca o nula atención. Con otro color aquellos temas que con un repaso serio y profundo el mismo estudiante pueda dominar y, por último, con el otro color aquellos conceptos para los que necesite la asesoría de un profesor o de algún otro estudiante que lo pueda ayudar. Con esto el color dominante indicará las acciones a seguir, así como el tiempo requerido para la adecuada preparación del examen.

Es aconsejable que se comprenda que no basta con resolver ejercicios. Es absolutamente indispensable el conocimiento de la teoría. Sobre todo en una asignatura en la que se necesita alto grado de abstracción e imaginación, resulta imposible aprender solamente *ejercicios tipo* y con ello pretender tener éxito. Es sabido que un mismo enunciado con datos diferentes puede conducir a un procedimiento de resolución totalmente diferente.

¿QUÉ ES UN EXAMEN? La pregunta parece ociosa, sobre todo dirigida a una persona que está preparándose para presentar un extraordinario; sin embargo, mientras más claro se tenga el concepto de examen extraordinario, más cerca se puede estar de presentarlo con éxito. Pues bien, entendamos por examen un instrumento de evaluación que le va a permitir al estudiante demostrar su conocimiento sobre la materia y a los sinodales la corroboración de dicho conocimiento. Dado que como se dijo, el examen extraordinario es el único elemento de evaluación, es de suma importancia que el sustentante sea ordenado y claro al responder el cuestionario. Un hecho innegable es que un examen desordenado y sucio es más difícil de calificar que uno limpio y ordenado. Cuando los sinodales deben calificar un número considerable de exámenes y en muy poco tiempo, si se encuentran ante un examen poco comprensible, el tiempo de investigar si la respuesta está correcta en algún porcentaje se reduce en comparación con un examen claro y ordenado. En este último caso, el sinodal puede percatarse con relativa facilidad en dónde se encuentran los errores y si éstos son conceptuales u operacionales. De manera que el estudiante debe estar consciente de que un examen es un documento muy importante, tan lo es que con él puede o no obtenerse una calificación aprobatoria.

LA PREPARACIÓN DE UN EXAMEN EXTRAORDINARIO.- Es una práctica frecuente entre el alumnado, que la preparación de un examen extraordinario consiste exclusivamente en la obtención de un conjunto de *exámenes atrasados,* unos cuantos días antes de la realización del suyo y por la premura, ni siquiera resuelven todos los reactivos de los exámenes conseguidos. Si nos ponemos a razonar un poco, la probabilidad de que un reactivo contenido en los atrasados se repita en el que se va a presentar es bajísima, podría afirmarse que es nula. Por otra parte, la resolución de reactivos atrasados como único método de estudio, tiende a la mecanización y eso no es deseable, sobre todo en materias como geometría analítica. Voy a presentar un ejemplo de dos reactivos con un mismo enunciado pero que deben resolverse de manera totalmente diferente:

EJEMPLO 1. Sea la recta L que tiene una ecuación vectorial

$L: \quad \overline{p} = (1,2,3) + t\,(3,-1,2)$ Obtenga sus correspondientes ecuaciones paramétricas y sus ecuaciones cartesianas en forma simétrica.

La solución del ejercicio es:

Por igualdad de vectores resulta:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Ahora despejando el parámetro t en cada una de las ecuaciones anteriores e igualando se obtienen las cartesianas:

$$\frac{x-1}{3} = 2 - y = \frac{z-3}{2}$$

EJEMPLO 2. Sea la recta L que tiene una ecuación vectorial

$L: \quad \overline{p} = (4,-2,3) + t\,(0,-3,2)$ Obtenga sus correspondientes ecuaciones paramétricas y sus ecuaciones cartesianas en forma simétrica.

La solución del ejercicio podría iniciarse en la misma forma; es decir:

Por igualdad de vectores resulta:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 - 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

El problema se presenta ante el estudiante que solamente memorizó el proceso o *mecanizó* su proceder, pues en la primera ecuación paramétrica no puede despejar al parámetro porque simplemente no interviene. La respuesta al problema está en la comprensión del concepto. El hecho de que una de las ecuaciones no contenga al parámetro significa que esa coordenada no puede variar, lo que quiere decir que, en este caso, la recta está contenida en el plano x = 4, por lo que las dos ecuaciones de la recta son:

$$\begin{cases} x = 4 \\ \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-3}{2} \end{cases}$$

Si el lector ha comprendido este concepto y no sólo mecanizó el procedimiento, le pregunto ahora, ¿cómo resolvería el caso siguiente?

Sea la recta L que tiene una ecuación vectorial

$L: \quad \overline{p} = (-3,\ 2,-5) + t\,(0,-1,0)$ Obtenga sus correspondientes ecuaciones paramétricas y sus ecuaciones cartesianas en forma simétrica.

Por esto, la preparación de un examen extraordinario puede iniciarse con lo que señalé al inicio de esta guía; es decir, un diagnóstico serio y personal de la situación del estudiante con respecto a la materia. Posteriormente elaborar un plan de acción con tiempos razonables para adquirir o recordar los conceptos que están olvidados o nunca han sido aprendidos. Auxiliarse de un buen material bibliográfico y del recurso de la asesoría y solamente como la parte final de la preparación está la resolución de exámenes atrasados, ¿Por qué no? No lo rechazo pero no debe ser eso el método de preparación. En la utilización de los libros, les recomiendo que sigan esta estrategia: una vez estudiado y adquirido un concepto, para evaluarlo, resuelvan los ejercicios que el libro contenga como ejemplos que incluyen la resolución, pero en un principio lean exclusivamente el enunciado, tapando con una hoja la resolución. Intenten la resolución y puedan o no con el ejercicio, una vez razonado descubran la resolución del libro y compárenla con la suya, o bien si no lograron resolverlo, vean cómo lo resolvió el autor. En cualquiera de los dos casos, el hecho de haberlo intentado antes y ver la solución del autor va a servir para ir afirmando el concepto que se está estudiando. Posteriormente ataquen los ejercicios propuestos, pero elijan aquellos que traen la solución al final del libro. Intenten llegar a esa solución. Para finalizar, aborden ahora los ejercicios propuestos que no tienen la solución. Siempre habrá una forma de comprobar si están en lo correcto. Por ejemplo, supóngase el ejercicio:

EJEMPLO 3. Sean las rectas que tienen un punto en común:

$$L_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 5t \quad ; t \in R \\ z = 8 - 4t \end{cases} \qquad L_2 : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -2 \qquad ; t \in R \\ z = 8 + 6t \end{cases}$$

Determinar la ecuación cartesiana del plano π que contiene a las dos rectas.
Para resolver este ejercicio es necesario conocer, por ejemplo, un vector normal al plano y las coordenadas de algún punto de dicho plano. En cuanto a esto último no hay problema pues el punto de intersección de las dos rectas puede servir. Al analizar las ecuaciones de las rectas resulta evidente que el punto de intersección tiene por coordenadas I(3, -2, 8).
Por otra parte, para un vector normal, lo que puede hacerse es calcular las componentes del producto vectorial de los vectores directores de cada recta:

$$\overline{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -5 & -4 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -30i + 2j - 10k$$

Como lo que interesa es la dirección, puede utilizarse $\overline{N} = (-15, 1, -5)$

La ecuación del plano entonces puede obtenerse:

$(x-3, y+2, z-8) \bullet (-15, 1, -5) = 0$

$-15x + y - 5z + 87 = 0$

Aquí termina el ejercicio. El estudiante puede comprobar si su respuesta es correcta, por ejemplo obteniendo las coordenadas de un punto diferente al de intersección para cada una de las dos rectas y sustituyendo estas coordenadas en la supuesta ecuación del plano. Si la ecuación se satisface entonces puede tenerse la seguridad de que se ha llegado a la respuesta correcta.
Así, si se le da el valor uno al parámetro t en cada recta, se obtiene:

Para L_1 $\quad P(4, -7, 4)$

Para L_2 $\quad Q(1, -2, 14)$

Sustituyendo P en la ecuación del plano

$-15(4) + (-7) - 5(4) + 87 = 0$

La ecuación se satisface.
Ahora sustituyendo Q en la misma ecuación:

$-15(1) + (-2) - 5(14) + 87 = 0$

Como también se satisface el problema está bien resuelto.
Todo este procedimiento que sugiero les va dando confianza en lo que se hace. ¿Cuántas veces un alumno reprueba por no haber confiado en lo que hizo? ¿No es cierto que en ocasiones al salir del examen nos damos de topes porque borramos algo que estaba bien? Eso refleja falta de confianza en nuestros conocimientos.

LA UTILIZACIÓN DE ESTA GUÍA.- La guía que tienen en sus manos ha sido elaborada con la idea de que no solamente sea un puñado de ejercicios. En otras palabras, no se trata de un cuadernillo de ejercicios. Se trata de que tengan un instrumento que les permita preparar con éxito la presentación de un examen de Geometría Analítica. El empleo de esta guía puede ser diferente para cada estudiante. Recordemos que no existe "*el método de estudio*" Cada persona, de acuerdo con sus características personales, puede tener su propio método.
Como podrán observar, la guía contiene la presentación de ella, con un conjunto de descripciones y recomendaciones, así como ejercicios de la asignatura. La mayor parte de estos ejercicios son de mi invención. Otros de ellos formaron parte de algún examen

colegiado o departamental, entre éstos se cuenta con algunos en los que yo mismo participé en su elaboración, y también he elegido algunos de las series de ejercicios que semestre a semestre propone la Coordinación de Geometría Analítica. La elaboración o selección de ejercicios en ningún caso tuvo como criterio para su proposición el grado de dificultad. En realidad, este grado de dificultad es percibido de manera diferente por cada persona. Depende del conocimiento del concepto y del dominio de los antecedentes necesarios para la resolución del ejercicio. La selección de los ejercicios se basó principalmente en los conceptos por evaluar. De manera que, dada la imposibilidad de preguntar todo el material de un curso, se tenga una cantidad de ejercicios que abarquen la evaluación de los conceptos más importantes o más significativos de la asignatura. En cada ejercicio está definido el concepto principal por evaluar; así como los conceptos secundarios o antecedentes. De manera que si el usuario de esta guía selecciona algún ejercicio y lo logra resolver, esto puede darle la idea de que el concepto principal por evaluar ha sido comprendido o dominado, pero si no logra llegar a su resolución, esto le señalará que debe estudiar más ese concepto y los antecedentes o los conceptos secundarios. Por ello, propongo dos formas de utilización de la guía, pero siempre dejando la libertad de que sea el propio estudiante quien decida cómo la va a emplear:

La primera forma consiste en elaborar, como ya mencioné, un diagnóstico del nivel de conocimiento de los conceptos de la materia. Una vez que se tenga este análisis, el alumno puede buscar los ejercicios que se refieran a los conceptos que él ha clasificado como de un amplio dominio. Si los resuelve con facilidad, esto significará que su diagnóstico fue correcto y que puede continuar con los conceptos que marcó que requieren de un estudio personal, quizás no tan profundo. Ahora recomiendo que proceda a ese estudio para, posteriormente, enfrentarse a los ejercicios que se relacionan con esos conceptos. Posteriormente deberá hacer frente a los conceptos que en su diagnóstico describió como aquellos que requieren de un estudio profundo, ayudado por un asesor o por la asistencia a un curso formal. Cuando haya estudiado con esa profundidad y crea haber comprendido esos conceptos, debe proceder a la resolución de los ejercicios correspondientes. En los tres casos, como ya dije, recomiendo que el estudiante intente resolverlos sin ver la resolución que se presenta en la guía.

Otra forma de utilización de la guía puede ser con el estudio preliminar de los conceptos. Esto es ineludible. El estudio con el grado de profundidad señalado por el diagnóstico personal. Posteriormente, el estudiante puede seleccionar un ejercicio de cada bloque para formar un examen. Cada bloque contiene ejercicios de cada capítulo del programa vigente. La selección puede ser aleatoria o no. Si el estudiante pudo resolver exitosamente ese examen, puede proceder a la selección de otros ejercicios para formar otro examen. El número de exámenes que así puede resolver depende de cada estudiante y de la facilidad o dificultad que tenga para resolverlos. Mi recomendación es que no sean menos de cinco. Además puede ayudarlo en diagnosticar en dónde requiere repasar los conceptos de la asignatura o los conceptos antecedentes. Estoy consciente de que el programa de la asignatura puede cambiar. Es más, es deseable que los programas no permanezcan estáticos por mucho tiempo; sin embargo, la guía puede continuar siendo útil aunque los bloques de ejercicios ya no correspondieran a los temas del curso. De todas maneras los conceptos siempre serán vigentes y hasta la búsqueda de cuál concepto corresponde a los que se desea evaluar puede ayudar al estudiante a definir mejor las áreas del conocimiento que requieren su atención.

LA PRESENTACIÓN DE UN EXAMEN EXTRAORDINARIO.- El nombre mismo de este tipo de exámenes indica que debe tratarse de una situación de excepción. Lo ideal es que el estudiante logre el aprendizaje de una asignatura durante un curso normal y, como consecuencia de ello, la evaluación ordinaria del curso termine con una nota aprobatoria que manifieste que el aprendizaje fue alcanzado. Existen muchas razones para que un estudiante no logre esta culminación ordinaria y no es el objetivo de esta guía ni analizar estas causas ni enjuiciarlas, pero una vez que un estudiante tiene que recurrir a este procedimiento *extraordinario* para comprobar que ha alcanzado el nivel de conocimientos adecuados de la asignatura, debe tomar en consideración lo siguiente:

La preparación de un examen extraordinario requiere de una preparación razonada y con tiempo suficiente. Esta preparación puede requerir tan solo de un repaso superficial de los conceptos del curso, si el nivel de conocimientos es de regular a bueno. O bien puede necesitarse de recursar la asignatura si el diagnóstico señala que el nivel es de malo a nulo. Entre estos extremos se encuentran todas las demás situaciones y el tiempo y profundidad de la preparación está sujetos a la situación particular. Es altamente recomendable que jamás se presente un examen extraordinario sin la adecuada preparación. Esto puede acarrear, además de no acreditarlo, una frustración en el sustentante que puede ocasionar diversas reacciones en su mente. Desde luego que también es posible que a pesar de haber preparado un examen no se acredite, el alumno deberá analizar cuál o cuáles fueron las causas de este tropiezo y jamás debe desmoralizarse. La vida suele presentarnos altas y bajas pero una experiencia es un fracaso cuando así lo creemos. Debe tenerse claro qué fue lo que ocasionó la no acreditación y buscar el camino para resolver la situación. Si el problema es de aspecto vocacional, qué mejor que pueda comprenderse y buscar el rumbo que satisfaga plenamente la vocación particular. De no ser ese el motivo, no debe pensarse en problemas de falta de capacidad intelectual. En los muchos años que tengo de práctica docente pueden contarse por miles los estudiantes que he conocido por haber sido alumnos de algún grupo de mi responsabilidad o que de alguna otra manera he observado y puedo afirmar que de entre todos ellos me sobran los dedos de una mano para señalar quienes sí podría afirmarse que han tenido problemas de este tipo. Estadísticamente puede considerarse como cero. Una persona que ha alcanzado este nivel de estudios tiene capacidad para cursar con éxito las asignaturas de los planes de estudio de ingeniería y para muchas otras carreras.

Para la presentación de un examen, el estudiante debe buscar hacerlo en las mejores condiciones físicas posibles. Los *nervios* son acusados de manera sistemática por los estudiantes que fracasan. Desde luego que no se puede negar que un estado de intranquilidad puede ocasionar problemas insuperables durante el desarrollo de un examen, pero este tipo de situaciones se disminuye drásticamente con la seguridad que el estudiante tenga de sus conocimientos. Es decir, con más y mejor preparación, menor nerviosismo. También un estudiante que ha dormido adecuadamente y se ha alimentado correctamente, tiene más posibilidades de mantenerse físicamente bien durante el examen.

La organización y limpieza de un examen ayudan enormemente a que quienes deben evaluar su nivel de conocimientos lo hagan de manera más correcta.

Para la resolución propiamente dicha del examen, tómense un tiempo adecuado en la comprensión correcta y profunda de cada uno de los reactivos. Parece una pérdida de tiempo el que se inviertan varios minutos para leer y comprender totalmente cada reactivo; sin embargo, una razón de fracaso, con una alta incidencia, es que el estudiante responde lo que cree que le están preguntando pero bien a bien no tiene claro el enunciado del reactivo.

Hay ocasiones en que el alumno desperdicia el tiempo en calcular “*un dato*” Por otra parte, es lógico y natural que algunos de los reactivos del examen puedan resolverse más fácilmente que otros. Recomiendo que intenten en primer lugar aquellos que así les parezca, aunque el número de puntos que se les asignen sea bajo. Es mejor asegurar esa cantidad de puntos con ejercicios que pueden responderse de manera rápida. Posteriormente intenten la resolución de los reactivos que se estimen con una dificultad regular, para que si tienen tiempo lo dediquen a los ejercicios que catalogaron como los más difíciles.
No dejen a la suerte la acreditación de la asignatura. Recuerden que la suerte quizás no exista, lo que deben es buscar el éxito y éste se obtiene con el trabajo. El gran filósofo y escritor estadounidense Ralph Waldo Emerson (1803-1882) sintetizó el pensamiento anterior en esta frase “*Yo creo en la suerte, cuanto más trabajo más suerte tengo*”.

TEMA I
TRIGONOMETRÍA

EJERCICIO I.1. Si $sen\,A=\frac{3}{5}$ y $\cos B=\frac{12}{13}$; ¿Cuánto vale $sen\left(A-B\right)$?

SOLUCIÓN.
Como $sen\,A=\frac{3}{5}$, entonces cateto opuesto = 3
hipotenusa = 5
por lo que cateto adyacente $=\sqrt{5^2-3^2}=4$ y entonces $\cos A=\frac{4}{5}$
Por otra parte, como $\cos B=\frac{12}{13}$, cateto adyacente = 12; hipotenusa = 13
Cateto opuesto $=\sqrt{169-144}=5$ y entonces $sen\,B=\frac{5}{13}$
Ahora de la identidad $sen\left(A-B\right)=sen\,A\cos B-sen\,B\cos A$

$$sen\left(A-B\right)=\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right)-\left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=$$

$$=\frac{36}{65}-\frac{20}{65}=\frac{16}{25}$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Identidades de la suma y diferencia de ángulos.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Funciones trigonométricas. Aritmética de las fracciones**.** Teorema de Pitágoras**.**

EJERCICIO I.2. Si $sen\,\alpha=\frac{2}{7}$, ¿cuánto vale $\sec\alpha$?

SOLUCIÓN.
Cateto opuesto = 2
Hipotenusa = 7
entonces, cateto adyacente $=\sqrt{49-4}=\pm\sqrt{45}$
por lo que $\sec\alpha=\frac{7}{\pm\sqrt{45}}$

Otra forma:

$$\cos^2\alpha=1-sen^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha=1-\left(\frac{2}{7}\right)^2=\frac{45}{49}$$

entonces: $\cos\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{45}}{7}$

y finalmente $\sec\alpha = \pm\dfrac{7}{\sqrt{45}}$

CONCEPTO PRINCIPAL: Funciones trigonométricas.

CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Relaciones entre funciones trigonométricas. Identidades pitagóricas y por cociente.

EJERCICIO I.3.. El seno de 30^0 vale un medio. ¿Cuánto vale $sen\ 15^0$?

SOLUCIÓN.

De la identidad

$$sen^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

Se utilizará en esta expresión $2\alpha = 30^0$, entonces $\cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Por lo que: $sen15^0 = \dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

Finalmente:

$$sen15^0 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Se considera el signo positivo porque el seno es positivo en el primer cuadrante.

CONCEPTO PRINCIPAL: Identidades de ángulo doble.

CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Relaciones entre funciones trigonométricas. Valores de las funciones trigonométricas para ángulos de cero, treinta, cuarenta y cinco, sesenta y noventa grados y sus múltiplos. Signo de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes.

EJERCICIO I.4. Usted está en la rivera de un río con un aparato que le permite medir ángulos (teodolito o tránsito) y una cinta con la que pueden medir distancias. Se desea medir la distancia entre los puntos A y B localizados en la otra rivera del río y usted no tiene posibilidad de atravesarlo. Señalar el procedimiento para medir esa distancia con los elementos con los que cuenta y sin atravesar el río. Ver figura I.1.

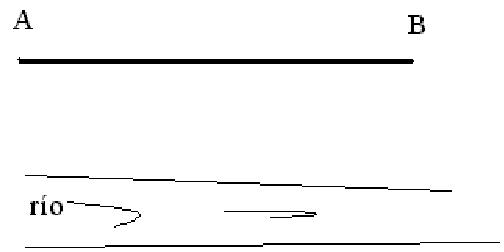


FIGURA I.1

SOLUCIÓN.
En primer lugar se eligen dos puntos C y D, en el lado accesible, midiendo la distancia entre ellos (figura I.2.)

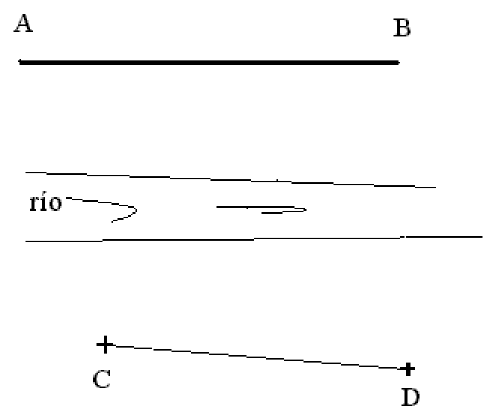


FIGURA I.2

Posteriormente se miden los ángulos c y d, con lo que es posible conocer el ángulo b por medio del hecho de que la suma de los tres ángulos de un triángulo vale 180^0 (figura I.3)
Ahora es posible aplicar la ley de los senos para conocer la distancia CB:

$$CB = \frac{CD \, sen\, d}{sen\, b}$$

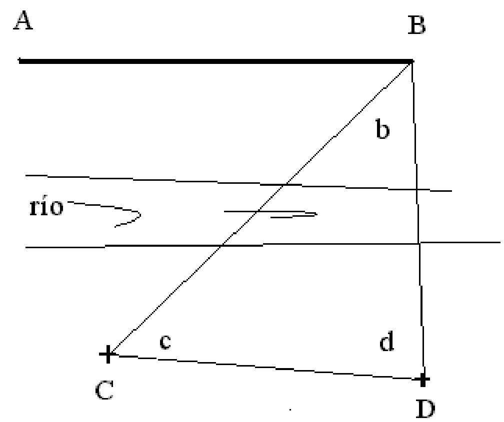


FIGURA I.3

Se hace algo análogo ahora con los ángulos f y e, para conocer el ángulo a (figura I.4) y así aplicar de nuevo la ley de los senos, ahora para determinar la distancia DA:

$$CA = \frac{CD\, sen\, e}{sen\, a}$$

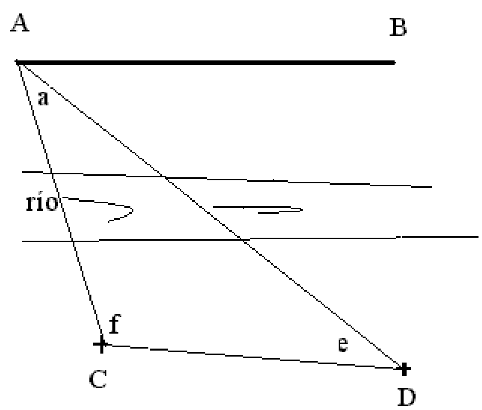


FIGURA I.4

Ahora ya se puede medir la distancia AB al considerar el triángulo ABC (figura I.5) en donde se conocen las distancias CB y CA y en donde es posible medir el ángulo g. Se aplica entonces la ley de los cosenos:

$$AB = \sqrt{CB^2 + CA^2 - 2(CB)(CA)\cos g}$$

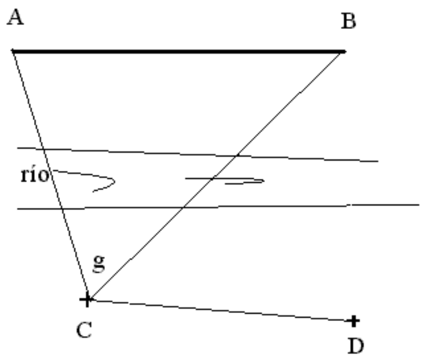


FIGURA I.5

CONCEPTO PRINCIPAL: Ley de los senos. Ley de los cosenos.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES. Funciones trigonométricas. Aritmética de los radicales.

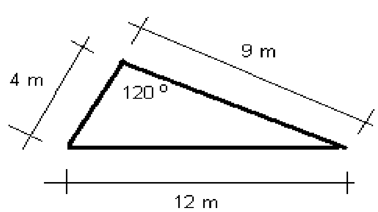
EJERCICIO I.5. ¿Cuál es el ángulo α para el cual $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $0 \le \alpha < 2\pi$ y tanto su seno, como su tangente, su cotangente y su cosecante son negativos?

SOLUCIÓN.

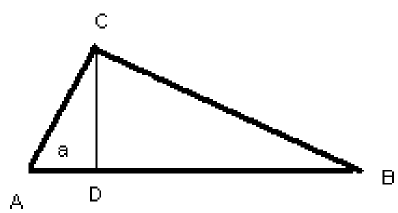
El ángulo cuyo coseno es igual a un medio en el primer cuadrante es $\alpha = \frac{\pi}{3}$ pero todas las funciones trigonométricas en dicho cuadrante son positivas así que tiene que estar en otro cuadrante. En el segundo y en el tercero el coseno es negativo, de manera que tiene que estar en el cuarto cuadrante. Además, en el cuarto cuadrante tanto la función seno como la tangente, la cotangente y la cosecante son negativas, por lo que:
$\alpha = 300^0$

CONCEPTO PRINCIPAL: Círculo trigonométrico.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Relaciones entre las funciones trigonométricas. Funciones trigonométricas para ángulos conocidos.

EJERCICIO I.6. Calcular el área del triángulo



SOLUCIÓN.
Denotemos los elementos del triángulo de acuerdo con la figura:



Al aplicar la ley de los senos:

$$\frac{9}{sen\,a}=\frac{12}{sen120^0}$$

Por lo que:

$$sen\,a=\frac{9\,sen120^0}{12}=\frac{3}{4}\,sen120^0$$

Ahora del triángulo rectángulo ABD:

$$h=4\,sen\,a$$

entonces:

$$h=(4)\,\frac{3}{4}\,sen120^0=3\,sen120^0$$

El área vale:

$$Área=\frac{1}{2}(12)(3\,sen120^0)=$$

$$=18\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=9\sqrt{2}\;unidades\;de\,\sup erficie$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Ley de los senos.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Área de figuras geométricas. Triángulos rectángulos. Valores de las funciones trigonométricas de ángulos conocidos.

TEMA II
CÓNICAS

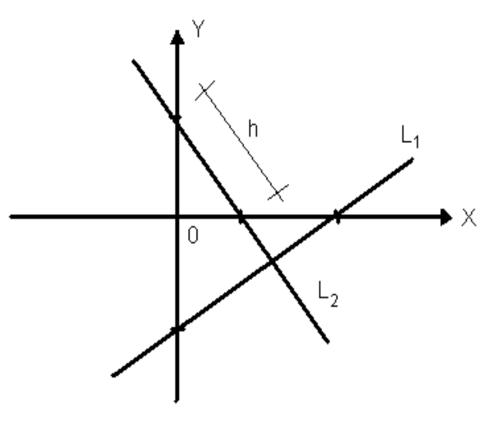
EJERCICIO II.1. Determinar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos de intersección de la circunferencia $(x-1)^2+(y+7)^2=16$ con la recta $x=1$; y que tiene uno de sus vértices en el punto V(1, -12).

SOLUCIÓN. Dado que los focos de la elipse están alojados en la recta de ecuación x = 1, en ella también se localiza el eje mayor. La distancia focal es igual al diámetro de la circunferencia y la semidistancia focal es igual al radio. El centro de la elipse coincide con el de la circunferencia.
C(1, –7)
Ahora, la distancia c es igual al radio:
$c=r=\sqrt{16}=4$
Además:
$a=\left|-12-(-7)\right|=5$
Por otra parte:
$b^2=a^2-c^2=25-16=9$
entonces, la ecuación de la elipse queda:
$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+7)^2}{25}=1$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Elipse. Características geométricas y ecuaciones.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: La circunferencia. Características geométricas y ecuaciones. La recta. Ecuación de la recta.

EJERCICIO II.2. Calcular la longitud de la hipotenusa del triángulo que se forma con los ejes coordenados y la recta L_2 que contiene al punto A(1, 1) y que es perpendicular a la recta L_1 de ecuación $x-2y+6=0$

SOLUCIÓN.
En la figura se observa el triángulo, su hipotenusa y las dos rectas:



$$m_1 = -\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

Por lo que la pendiente de la recta perpendicular es:
$m_2 = -2$

entonces:
$y - 1 = -2\,(x - 1)$

desarrollando y simplificando:

$$2x + y = 3$$

Ahora, si x =0,   y = 3

Y si   y = 0, $x = \frac{3}{2}$

Y éstos son los valores de los catetos, por lo que:

$$h = \sqrt{(3)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{9 + \frac{9}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{45}}{2}\, unidades\; de\; longitud$$

Otra forma es calculando la distancia entre los puntos $P_1(0, 3)$ y $P_2\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

Es decir:

$$h = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 0\right)^2 + (0 - 3)^2} = \frac{\sqrt{45}}{2}\, unidades\; de\; longitud$$

CONCEPTO PRINCIPAL: La recta.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Teorema de Pitágoras. Distancia entre dos puntos. Área de un triángulo.

EJERCICIO II.3. Determinar la ecuación de la parábola con vértice en el eje de las abscisas, eje paralelo al eje de las ordenadas y que contiene a los puntos de coordenadas $A(0,12)$, $B(1,3)$ y $C(5,27)$

SOLUCIÓN:

La forma de la ecuación de la parábola es $y = 4p\,(x-h)^2$ ...(1)

Al sustituir en (1) las coordenadas del punto A:

$12 = 4p\,h^2$ ... (2)

Ahora las del punto B:

$3 = 4p\,(1-h)^2$ ... (3)

de (2) y (3):

$$4p = \frac{12}{h^2} = \frac{3}{(1-h)^2}$$

$$12(1-h)^2 = 3h^2$$

$$4(1-h)^2 = h^2$$

$$2(1-h) = \pm h$$

Para el signo positivo:

$$2(1-h) = h \qquad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{2}{3}$$

entonces:

$$4p = \frac{12}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 27$$

De manera que la ecuación de la parábola, para este valor de h es:

$$y = 27\left(x - \frac{2}{3}\right)^2$$

pero al sustituir las coordenadas de C:

$$27 \neq 27\left(5 - \frac{2}{3}\right)^2$$

Ahora, para el signo negativo:

$2(1-h) = -h \qquad \Rightarrow \quad h_2 = 2$

Para este valor:

$$4p = \frac{12}{2^2} = 3$$

la otra parábola que contiene a A y a B tiene por ecuación:

$$y = 3(x-2)^2$$

sustituyendo las coordenadas de C:

$$27 = 3(5-2)^2$$

por lo que la ecuación buscada es:

$$y = 3(x-2)^2$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Parábola. Características geométricas y ecuaciones.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Lugar geométrico. Álgebra elemental.

EJERCICIO II.4. Determinar la ecuación de una recta paralela a la recta L_1 de ecuación $x + y = 1$ y que dista de ella $\sqrt{8}$ unidades.

SOLUCIÓN:
La pendiente de L_1 es $m = -\frac{a}{b}$
En este caso:

$$m = -\frac{1}{1} = -1$$

por lo que cualquier recta perpendicular a L_1 tiene como pendiente $m_2 = 1$

Ahora, la ecuación de una recta perpendicular a L_1 y que pasa por el punto P(1,0) perteneciente a L_1 es:

$$L_2 : \quad y = x - 1$$

Un punto perteneciente a L_2 y que dista de L en $\sqrt{8}$ unidades cumple con:

$$\sqrt{8} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}$$
$$\sqrt{8} = \sqrt{(x-1)^2 + (x-1-0)^2}$$
$$\sqrt{8} = \sqrt{2(x-1)^2}$$

elevando al cuadrado ambos miembros:

$$8 = 2(x-1)^2$$

$$x-1 = \pm 2$$

entonces:

$$x_1 = 3$$
$$x_2 = -1$$

si se elige el primer valor:

$$y_1 = 3-1 = 2$$

Por lo que una recta paralela a L_1 y con una distancia de $\sqrt{8}$ unidades, tiene la misma pendiente que L_1 y contiene al punto P(3, 2). Su ecuación es:

$$y-2 = -(x-3)$$
$$y = -x+5$$

CONCEPTO PRINCIPAL: La recta. Pendiente.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Distancia entre dos puntos**.** Exponentes y radicales.

EJERCICIO II.5. Determinar la expresión matemática de la familia de circunferencias con centro en la recta de ecuación $y = x$ y que son tangentes al eje de las abscisas.

SOLUCIÓN:
La ecuación de una circunferencia cualquiera es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

En este caso, como el centro de las circunferencias está en la recta $y = x$, esto significa que $k = h$

Por otra parte, por la tangencia con el eje de las abscisas se tiene que $r = h$, entonces:
$$(x-h)^2 + (y-h)^2 = h^2 \quad ; \quad h \in R$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Circunferencia. Características geométricas y ecuaciones.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: La recta. Geometría elemental. Recta tangente.

EJERCICIO II.6. Determinar la ecuación de la circunferencia concéntrica a la de ecuación $(x-3)^2+(y+2)^2=16$ y que es tangente a la recta de ecuación $3x-4y+8=0$

SOLUCIÓN:
Al ser circunferencias concéntricas, el centro de la circunferencia buscada es el mismo que el de la otra; es decir: C(3, -2).

La pendiente de la recta es $m=-\dfrac{3}{-4}=\dfrac{3}{4}$

Entonces, una recta perpendicular a la anterior y que pasa por el centro de las circunferencias tiene por ecuación:

$$y+2=-\frac{4}{3}(x-3)$$

desarrollando:

$$4x+3y-6=0$$

El punto de intersección entre ambas rectas será el punto de tangencia de la circunferencia buscada con la recta que es dato:

$$\begin{cases} 3x-4y+8=0 \\ 4x+3y-6=0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema resulta:

I(0, 2)

Por lo que el radio tiene por longitud:

$$r=\sqrt{(3-0)^2+(-2-2)^2}=$$
$$=\sqrt{9+16}=5$$

finalmente, la ecuación de la circunferencia es:

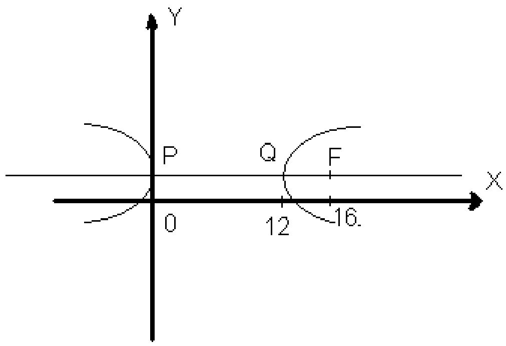
$$(x-3)^2+(y+2)^2=25$$

CONCEPTO PRINCIPAL: La circunferencia. La recta.

CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Geometría elemental. Recta tangente. Álgebra. Resolución de sistemas de ecuaciones simultáneas.

EJERCICIO II.7. Una hipérbola es tangente en una de sus ramas a la recta de ecuación $x=12$ en el punto Q(12, 2). Además, su otra rama es tangente al eje de las ordenadas en el punto P(0, 2), y uno de sus focos está localizado en el punto F(16, 2). Determinar la ecuación de la hipérbola.

SOLUCIÓN:
Para comprender correctamente los datos del ejercicio, conviene hacer una figura:



El centro de la hipérbola está en $C\left(\frac{0+12}{2}, 2\right)$ es decir $C(6, 2)$

Por otra parte, a = 6, c = 16-6 = 10

entonces:

$$b=\sqrt{10^2-6^2}=8$$

la ecuación es:

$$\frac{(x-6)^2}{36}-\frac{(y-2)^2}{64}=1$$

CONCEPTO PRINCIPAL: La hipérbola. Características geométricas y ecuaciones.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Principio cartesiano. Lugar geométrico. Graficación.

EJERCICIO II.8. Sea la recta L con ecuación $3x-4y-12=0$ en el sistema de referencia XY. Determinar la ecuación de L con respecto a un sistema UV que tiene un giro de un ángulo θ de tal manera que el eje U (de las abscisas) es paralelo a la recta L.

SOLUCIÓN: El ángulo de giro es igual al ángulo de inclinación de L. Este ángulo de inclinación, además, tiene como tangente trigonométrica a la pendiente de L. De la ecuación de L se tiene que $m=-\frac{3}{-4}=\frac{3}{4}$

Ahora bien, para efectuar la rotación de los ejes se usan las expresiones:

$$x=u\cos\theta-v\,sen\,\theta$$
$$y=u\,sen\,\theta+v\cos\theta$$

Como $\tan\theta=\frac{3}{4}$, esto significa que el cateto opuesto vale tres y el adyacente, cuatro. Entonces la hipotenusa es igual a $h=\sqrt{3^3+4^2}=5$, por lo que:

$$sen\,\theta=\frac{3}{5}$$
$$\cos\theta=\frac{4}{5}$$

las ecuaciones de transformación en este caso quedan:

$$x=\frac{4}{5}u-\frac{3}{5}v$$
$$y=\frac{3}{5}u+\frac{4}{5}v$$

sustituyendo en la ecuación de la recta:

$$3\left(\frac{4}{5}u-\frac{3}{5}v\right)-4\left(\frac{3}{5}u+\frac{4}{5}v\right)-12=0$$

desarrollando y simplificando:

$$-\frac{9}{5}v-\frac{16}{5}v-12=0$$

finalmente:

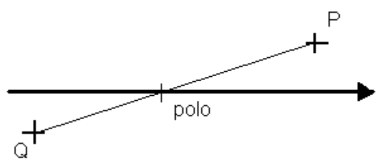
$$5v=-12$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Rotación de ejes.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: La recta. Pendiente. Trigonometría. Álgebra elemental.

TEMA III
CURVAS EN EL PLANO POLAR

EJERCICIO III.1. Sea el punto $P\left(\sqrt{3},1\right)$ en coordenadas cartesianas. Obtener la expresión del punto Q, simétrico de P con respecto al polo, en tres expresiones polares diferentes.

SOLUCIÓN:



Con las expresiones conocidas de transformación de coordenadas cartesianas a polares puede obtenerse una primera forma de representación en ese sistema:

$r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2}=2$

$\theta = ang\tan\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$, o lo que es equivalente 30^0

por lo que $P\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right)$

El punto Q, simétrico de P con respecto al polo, puede representarse::

$Q\left(2,\dfrac{7\pi}{6}\right)$

$Q\left(-2,\dfrac{\pi}{6}\right)$

$Q\left(2,-\dfrac{5\pi}{6}\right)$

NOTA.- Existen una infinidad de representaciones polares de cada punto del plano. Por ello, la respuesta no es única.

CONCEPTO PRINCIPAL: Transformación de coordenadas cartesianas a polares.

CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Simetría de puntos en coordenadas polares**.** Funciones trigonométricas. Geometría elemental, ángulos. Conversión de radianes a grados y viceversa.

EJERCICIO III.2. Sea la curva C expresada en forma polar por la la ecuación
$r^2 = 2\cos 4\theta$

Determinar si C es simétrica:

a) con respecto al eje polar;
b) con respecto a la recta a 90^0 (eje copolar);
c) con respecto al polo.

SOLUCIÓN:

a) Se cambia θ por $-\theta$:

$$r^2 = 2\cos 4(-\theta) = 2\cos 4\theta$$

ya que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

por lo tanto, C es simétrica con respecto al eje polar.

b) Ahora se sustituye $\pi - \theta$ por θ:

$$\begin{aligned} r^2 &= 2\cos 4(\pi - \theta) = \\ &= 2\cos(4\pi - 4\theta) = \\ &= 2[\cos 4\pi \cos 4\theta + sen\, 4\pi\ sen\, 4\theta] = \\ &= 2\cos 4\theta \end{aligned}$$

puesto que $\cos 4\pi = 1 \quad ; \quad sen\, 4\pi = 0$

entonces, C es simétrica con respecto a la recta a 90^0 (eje copolar).

Otra forma es cambiando r por $-r$, y θ por $-\theta$:

$$(-r)^2 = 2\cos 4(-\theta)$$

y se llega a la misma conclusión.

c) Para este último análisis se cambia ahora r por $-r$:

$$(-r)^2 = 2\cos 4\theta$$
$$r^2 = 2\cos 4\theta$$

por lo que C también es simétrica con respecto al polo.

CONCEPTO PRINCIPAL: Simetría en coordenadas polares.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Identidades trigonométricas. Álgebra elemental.

EJERCICIO III.3. Sea la curva P en coordenadas polares:
$r = 4\cos\theta$

a) identificar la curva;
b) obtener la ecuación de la curva C simétrica a P con respecto a la recta a 90^0 (eje copolar).

SOLUCIÓN:

a) Al multiplicar por r en ambos lados de la ecuación se tiene:

$$r^2 = 4r\cos\theta$$

tomando en cuenta que:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

y que

$$x = r\cos\theta$$

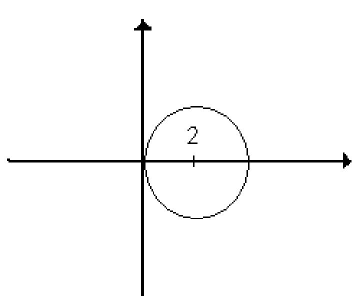
$$x^2 + y^2 = 4x$$

completando cuadrados:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

se trata de una circunferencia con centro en C(2, 0) y radio igual a dos unidades.



b) La expresión polar de la circunferencia simétrica de P con respecto al eje copolar es_

$$
\begin{aligned}
r &= 4\cos(\pi-\theta)= \\
&= 4\left[\cos\pi\cos\theta + sen\,\pi\, sen\,\theta\right]= \\
&= -4\cos\theta
\end{aligned}
$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Análisis de una curva representada por una ecuación polar.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Transformación de coordenadas polares a cartesianas. La circunferencia, su ecuación y características geométricas. Completar cuadrados. Identidades trigonométricas.

EJERCICIO III.4. Sean las rectas de ecuación polar:

$$R_1 : r = \frac{2}{\cos\theta}$$

$$R_2 : r = \frac{2\sqrt{3}}{sen\,\theta}$$

Obtener las coordenadas polares de su punto de intersección.

SOLUCIÓN:
Para la obtención de las coordenadas de su punto de intersección se consideran sus ecuaciones simultáneas, de manera que igualándolas:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{\cos\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{sen\,\theta} \\
&2\, sen\,\theta = 2\sqrt{3}\cos\theta \\
&sen\,\theta = \sqrt{3}\cos\theta \\
&\tan\theta = \sqrt{3} \\
&\theta = ang\tan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo en la de R_1:

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \\
&= \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4
\end{aligned}
$$

por lo que:

$$I\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Análisis de una curva en coordenadas polares.
CONCEPTOS SECUNDARIOS O ANTECEDENTES: Ecuaciones simultáneas. Funciones trigonométricas. Valor de funciones trigonométricas de ángulos conocidos.

EJERCICIO III.5. Sea la curva con ecuación polar:

$$r = \frac{4\cos\theta}{\cos 2\theta}$$

Determinar:

a) El o los puntos de intersección de la curva con el eje polar;
b) si la curva contiene al origen;
c) si la curva es abierta o cerrada;
d) si tiene simetría con respecto al eje polar;
e) su ecuación cartesiana.

SOLUCIÓN:

a) Para $\theta = 0$, $r = \dfrac{4\cos 0}{\cos 0} = 4$

Para $\theta = \pi$, $r = \dfrac{4\cos\pi}{\cos 2\pi} = -4$

Es el mismo punto, por lo que $P_1(4, 0)$

b) Sí lo contiene pues para $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $r = \dfrac{4\cos\frac{\pi}{2}}{\cos\pi} = 0$

c) Es abierta puesto que para $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ ó para $\theta = \dfrac{3}{4}\pi$,

r no existe.

d) Al cambiar θ por $-\theta$:

$$r = \frac{4\cos(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{4\cos\theta}{\cos 2\theta}$$

sí hay simetría.

e) Si multiplicamos ambos miembros por $\cos 2\theta$:

$$r\cos 2\theta = 4\cos\theta$$

$$r\left(\cos^2\theta - sen^2\theta\right) = 4\cos\theta$$

ahora si multiplicamos ambos lados por r:

$$r^2\cos^2\theta - r^2 sen^2\theta = 4r\cos\theta$$

$$x^2 - y^2 = 4x$$

completando cuadrados:

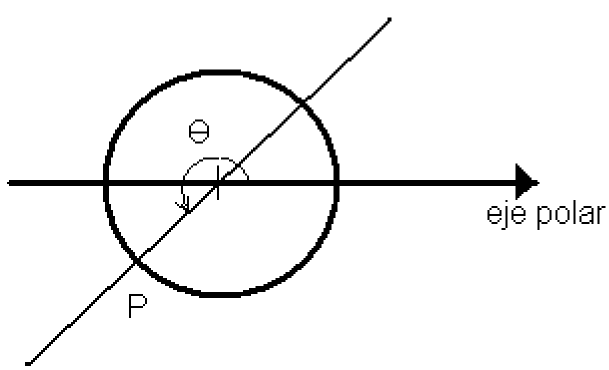
$$x^2 - 4x + 4 - y^2 = 4$$
$$(x-2)^2 - y^2 = 4$$

es una hipérbola equilátera con centro en C(2,0), longitud de ejes igual a cuatro unidades de longitud.

CONCEPTO PRINCIPAL: Análisis de curvas en coordenadas polares.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Funciones trigonométricas. Completar cuadrados. La hipérbola, sus características geométricas.

EJERCICIO III.6. Determinar las coordenadas polares del punto de intersección en el tercer cuadrante entre la circunferencia con centro en el origen, radio igual a uno; y la recta de ecuación cartesiana $y = x$

SOLUCIÓN:



Evidentemente se tiene que las coordenadas polares de P son:
$P(1, 225^0)$ ó $P(-1, 45^0)$

También pueden obtenerse al hacer simultáneas sus ecuaciones:

En forma cartesiana

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x \end{cases}$$

$$x^2 + x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

como interesa el punto del tercer cuadrante:

$$x = y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

por lo que $r = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$

$\theta = ang\tan \dfrac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 225^0$ por tratarse del tercer cuadrante.

CONCEPTO PRINCIPAL: Transformación de coordenadas polares a cartesianas.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: La recta. La circunferencia. Ecuaciones simultáneas. Valores de las funciones trigonométricas para ángulos conocidos.

EJERCICIO III.7. Descifrar el mensaje:

Yo $r = 100(1 - sen\theta)$ a la F.I.

SOLUCIÓN:
La expresión $r = 100(1 - sen\theta)$ es una curva expresada en forma polar. Si se analiza, es una curva cerrada porque r existe para cualquier valor de θ. Además, se tiene que contiene al polo puesto que para $\theta = \frac{1}{2}\pi \quad r = 0$

Hay simetría con respecto a la recta a 90^0 pues al sustituir $\pi - \theta$ por θ: se tiene:

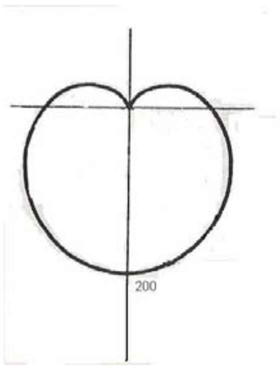
$$r = 100[1 - (sen\,\pi\cos\theta - sen\,\theta\cos\pi)] =$$

$$= 100(1 - sen\theta)$$

No hay simetría con respecto al eje polar ya que al sustituir $-\theta$ por θ la ecuación resultante no es equivalente:

$r = 100(1 + sen\theta)$

Finalmente se ve que se trata de una cardioide, por lo que el mensaje queda:

Yo 

a la F.I.

Es decir, yo amo a la Facultad de Ingeniería.

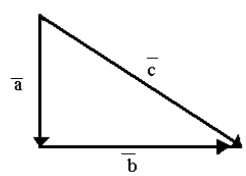
CONCEPTO PRINCIPAL: Ecuaciones polares de curvas. Cardioide.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Análisis de una curva representada por una ecuación polar. Funciones trigonométricas. Identidades trigonométricas.

TEMA IV
ÁLGEBRA VECTORIAL

EJERCICIO IV.1. Demostrar, por medio de álgebra vectorial, el teorema de Pitágoras.

SOLUCIÓN:

Sea el triángulo rectángulo en el que se alojan los vectores $\overline{a}, \overline{b}$ y $\overline{c}$, como se muestra en la figura:



Por la ley del triángulo de la adición de vectores se tiene:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$$

Si se multiplica por $\overline{c}$ en forma escalar en ambos miembros de la expresión:

$$(\overline{a} + \overline{b}) \bullet \overline{c} = \overline{c} \bullet \overline{c}$$

pero $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$

$$\left(\overline{a} + \overline{b}\right) \bullet \left(\overline{a} + \overline{b}\right) = \overline{c} \bullet \overline{c}$$

por distributividad:

$$\overline{a} \bullet \overline{a} + \overline{a} \bullet \overline{b} + \overline{b} \bullet \overline{a} + \overline{b} \bullet \overline{b} = \overline{c} \bullet \overline{c}$$

como los catetos son ortogonales se tiene:

$$\overline{a} \bullet \overline{b} = \overline{b} \bullet \overline{a} = 0$$

además:

$$\overline{a} \bullet \overline{a} = \left|\overline{a}\right|^2$$

finalmente:

$$\left|\overline{a}\right|^2 + \left|\overline{b}\right|^2 = \left|\overline{c}\right|^2$$

con lo que queda demostrado.

CONCEPTO PRINCIPAL: Operaciones con vectores. Producto escalar.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Teorema de Pitágoras. Propiedades de las operaciones con vectores.

EJERCICIO IV.2. Sean los puntos de coordenadas A(2, 3, 6), B(4, 4, 8) y C(-1, 5, 8).

a) Comprobar que los segmentos AB y AC forman un ángulo recto.
b) Obtener las coordenadas del punto D, que es el vértice faltante del rectángulo ABDC.
c) Calcular el área de dicho rectángulo.

SOLUCIÓN:

a) En primer lugar consideremos segmentos dirigidos en AB y en AC:

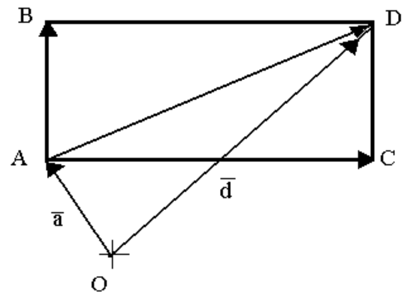
$$\overrightarrow{AB} = (4-2, 4-3, 8-6) = (2, 1, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-3, 2, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC} = (2)(-3) + (1)(2) + (2)(2) = 0$$

por lo que se comprueba que son ortogonales.

b) El vector de posición del punto D está dado por $\overline{d} = \overline{a} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \right)$ de acuerdo con la regla del paralelogramo, ver la figura:



$$\vec{AB} + \vec{AC} = (-1, 3, 4)$$

$$\overline{d} = (2, 3, 6) + (-1, 3, 4) = (1, 6, 10)$$

las coordenadas de D son:

D(1, 6, 10)

c) El área del rectángulo se puede obtener simplemente como el producto de la base por la altura, en este caso:

Área $= \left|\vec{AB}\right| \left|\vec{AC}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}\ \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 2^2} = 3\sqrt{17}$ unidades de superficie.

Otra forma de obtener el valor de esta área es por medio de:

Área $= \left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2i - 10j + 7k$$

$$\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-10)^2 + 7^2} =$$

$$= \sqrt{153} = 3\sqrt{17}\ \textit{unidades de superficie}$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Operaciones con vectores. Producto vectorial.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Propiedades de figuras geométricas elementales.

EJERCICIO IV.3. Sean los puntos A(-3, 0, 7) y B(-2, 2, 5) Determinar las coordenadas del punto C, localizado en el segmento AB a una distancia de A igual a un tercio de la distancia que separa a A y B.

SOLUCIÓN:
La distancia entre A y B es:

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(-2+3)^2 + (2-0)^2 + (5-7)^2} =$$

$$= \sqrt{1+4+4} =$$

$$= 3 \qquad \text{unidades de longitud.}$$

De manera que el punto C debe estar a una unidad de longitud de A y en la dirección del segmento dirigido $\vec{AB}$
Las coordenadas de C se pueden obtener con el vector de posición dado por:

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{u}_{AB}$$

donde $\bar{u}_{AB}$ es un vector unitario en la dirección de A a B.

$$\bar{u}_{AB} = \frac{(-2+3)i + (2-0)j + (5-7)k}{3} =$$

$$= \frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{2}{3}k$$

entonces:

$$\bar{c} = (-3, 0, 7) + \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \left(-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{19}{3}\right)$$

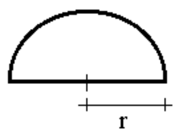
y las coordenadas de C son:

$$C\left(-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{19}{3}\right)$$

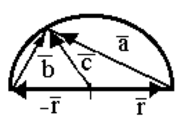
CONCEPTO PRINCIPAL: Adición de vectores.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Vectores unitarios. Aritmética de fracciones.

EJERCICIO IV.4. Demostrar, utilizando álgebra vectorial, que cualquier triángulo inscrito en una semicircunferencia, con uno de sus lados coincidiendo con el diámetro, es rectángulo.

SOLUCIÓN:
Sea la semicircunferencia de radio r



Si se inscribe en ella un triángulo y se alojan los vectores mostrados:



De la figura:

$$\overline{a} = \overline{c} - \overline{r}\ , \qquad \overline{b} = \overline{c} - \left(-\overline{r}\right) = \overline{c} + \overline{r}$$

ahora:

$$\overline{a} \bullet \overline{b} = \left(\overline{c} - \overline{r}\right) \bullet \left(\overline{c} + \overline{r}\right) =$$

$$= \overline{c} \bullet \overline{c} + \overline{c} \bullet \overline{r} - \overline{r} \bullet \overline{c} - \overline{r} \bullet \overline{r} =$$

$$= \left|\overline{c}\right|^2 - \left|\overline{r}\right|^2$$

ya que:

$$\bar{c} \bullet \bar{c} = \left|\bar{c}\right|^2$$

$$\bar{r} \bullet \bar{r} = \left|\bar{r}\right|^2$$

$$\bar{c} \bullet \bar{r} = \bar{r} \bullet \bar{c}$$

Pero $\left|\bar{c}\right| = \left|\bar{r}\right|$ puesto que estos dos vectores tienen como magnitud la longitud del radio de la semicircunferencia, por lo tanto:

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{a} \perp \bar{b}$$

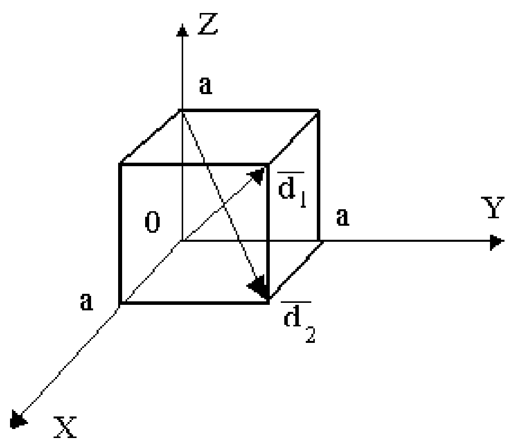
con lo que se demuestra que el triángulo es rectángulo.

CONCEPTO PRINCIPAL: Operaciones con vectores. Adición y multiplicación escalar.
CPNCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Geometría elemental. Circunferencias. Triángulos.

EJERCICIO IV.5. Calcular el ángulo agudo que forman dos diagonales de un cubo.

SOLUCIÓN:

Sea el cubo de lado a mostrado en la figura, en la que se señalan las diagonales elegidas.



Los vectores $\bar{d}_1$ y $\bar{d}_2$ tienen por componentes:

$\overline{d}_1 = (a, a, a)$, $\overline{d}_2 = (a, a, -a)$

entonces:

$$\theta = ang\cos\frac{\overline{d}_1 \bullet \overline{d}_2}{\left|\overline{d}_1\right|\left|\overline{d}_2\right|} =$$

$$= ang\cos\frac{a^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + a^2 + a^2}\sqrt{a^2 + a^2 + a^2}} =$$

$$= ang\cos\frac{a^2}{\sqrt{3a^2}\sqrt{3a^2}} =$$

$$= ang\cos\frac{a^2}{3a^2} =$$

$$= ang\cos\frac{1}{3} = 70.53^0$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Ángulo entre vectores.
CONCEPTOS SECUNDARIOS: Producto escalar. Geometría elemental. Figuras geométricas en el espacio. El cubo. Trigonometría. Funciones trigonométricas.

EJERCICIO IV.6. La dirección de una antena está dada por el vector $\overline{u} = (-4, 4, -2)$ La antena está sujeta por unos tensores. Uno de ellos tiene la dirección del vector $\overline{v} = (2, -1, 2)$ La longitud del tensor es de 6 m. Calcular la proyección del tensor sobre la dirección de la antena.

SOLUCIÓN:

La longitud que se desea calcular es igual al valor absoluto de la componente escalar de $\overline{v}$ sobre la dirección de $\overline{u}$, es decir, la magnitud de la componente vectorial de $\overline{v}$ en la dirección de $\overline{u}$

$$\left|comp\,esc_{\overline{u}}\ \overline{v}\right| = \left|\frac{\overline{v} \bullet \overline{u}}{\left|\overline{u}\right|}\right| =$$

$$= \left|\frac{-8 - 4 - 4}{\sqrt{16 + 16 + 4}}\right| = \frac{8}{3}\,m.$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Componente escalar de un vector en la dirección de otro. Componente vectorial de un vector en la dirección de otro.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Producto escalar de vectores. Radicales.

EJERCICIO IV.7. Demostrar que si $\overline{a} = (2, 3, -6)$; $\overline{c} = (39, -4, 11)$ y se tiene que ; $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{c}$, el vector $\overline{b}$ no es único.

SOLUCIÓN:

Como el vector $\overline{b}$ se desconoce, se supone que $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, por lo que:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -6 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$
$$= (3b_3 + 6b_2 ,\ -2b_3 - 6b_1 ,\ 2b_2 - 3b_1)$$

$$\overline{a} \times \overline{b} = \overline{c} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3b_3 + 6b_2 = 39 \\ -2b_3 - 6b_1 = -4 \\ 2b_2 - 3b_1 = 11 \end{cases}$$

simplificando y ordenando:

$$\begin{cases} 2b_2 + b_3 = 13 \ldots (1) \\ 3b_1 + b_3 = 2 \quad \ldots (2) \\ -3b_1 + 2b_2 = 11 \quad \ldots (3) \end{cases}$$

restando (2) a (1):

$$-3b_1 + 2b_2 = 11 \quad \ldots (4)$$

como (4) es igual a (3), el sistema es compatible indeterminado. Es decir que admite una infinidad de soluciones. Por ejemplo se tienen estas dos:

$$\overline{b_1} = (-1, 4, 5)$$

$$\overline{b_2} = \left(-\frac{1}{3}, 5, 3 \right)$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Producto vectorial.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Resolución de sistemas lineales. Determinantes.

EJERCICIO IV.8. Sean los vectores $\overline{a}$ y $\overline{b}$ de tal manera que:

$$\left|\overline{a}\times\overline{b}\right| = 5$$

y $\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right| = 10$

Calcular $\left|\overline{a}\bullet\overline{b}\right|$

SOLUCIÓN:

Se tiene que:

$$\left|\overline{a}\times\overline{b}\right| = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right| sen\,\theta$$

de donde:

$$sen\,\theta = \frac{\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|} =$$

$$= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

entonces:

$$\theta = ang\ sen\,\frac{1}{2} = 30^0 \quad ó \quad 150^0$$

Por otra parte, $\overline{a}\bullet\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\theta$

Ahora bien, $\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Por lo que:

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = 10\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm 5\sqrt{3}$$

Finalmente:

$$\left|\bar{a} \bullet \bar{b}\right| = 5\sqrt{3}$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Producto de vectores (escalar y vectorial).
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Trigonometría. Funciones trigonométricas.

TEMA V
LA RECTA Y EL PLANO EN EL ESPACIO

EJERCICIO V.1. Un objeto se localiza en el punto P de coordenadas $P(3,-4,8)$. Sobre él se lanza un haz luminoso con una dirección igual al vector $\overline{u}=(0,1,-1)$ para proyectarlo sobre una pantalla plana, la cual tiene por ecuación $x+y-1=0$
Determinar las coordenadas del punto de la pantalla en donde se proyecta el objeto y comprobar que el haz luminoso y la pantalla forman un ángulo de 30^0.

SOLUCIÓN:

Las coordenadas del punto donde se proyecta el objeto pueden calcularse como las del punto de intersección entre la recta que contiene a P y que tiene como ángulo director a $\overline{u}$ y el plano que contiene a la pantalla.
La ecuación vectorial de la recta es:

$$L: \quad \overline{p}=(3,-4,8)+t(0,1,-1); \quad t\in R$$

Sus ecuaciones paramétricas:

$$L:\begin{cases} x=3 \\ y=-4+t\,; \quad t\in R \\ 8-t \end{cases}$$

sustituyendo en la ecuación del plano:

$$3+(-4+t)-1=0$$

resolviendo:

$$t=2$$

ahora, con este valor del parámetro en las ecuaciones de la recta:

x = 3, y = -2, z = 6

por lo tanto, las coordenadas de la proyección del objeto en la pantalla son:

Q(3, -2, 6)

Para comprobar que el ángulo es de 30^0 emplearemos la expresión:

$$\theta = ang\ sen\ \frac{\overline{u} \bullet \overline{N}}{\left|\overline{u}\right| \left|\overline{N}\right|}$$

en este caso:

$$\overline{u} = (0, 1, -1), \quad \overline{N} = (1, 1, 0)$$

entonces:

$$\theta = ang\ sen\ \frac{(0, 1, -1) \bullet (1, 1, 0)}{\sqrt{2}\sqrt{2}} =$$

$$= ang\ sen\ \frac{1}{2} =$$

$$= 30^0$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Relaciones entre recta y plano.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Ecuaciones paramétricas de una recta. Álgebra elemental. Trigonometría.

EJERCICIO V.2. Sean las rectas L_1 y L_2 expresadas por:

$$L_1 : \quad \begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ 3x + 3y - 4 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$L_2 : \quad \begin{cases} \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{1-z}{3} \\ x = -3 \end{cases}$$

Determinar si las rectas se cortan o se cruzan. En caso de que se corten, obtener las coordenadas de su punto de intersección o, en caso de que se crucen, determinar la distancia entre ellas y las coordenadas del punto P de L_1 y del punto Q de L_2 para los cuales se tiene esa distancia.

SOLUCIÓN:

Calculemos la distancia entre las rectas. Si es nula, se cortan. Si es diferente de cero se cruzan. La expresión que permite ese cálculo es:

$$d = \frac{\left| \left(\overline{p}_2 - \overline{p}_1 \right) \bullet \overline{u}_1 \times \overline{u}_2 \right|}{\left| \overline{u}_1 \times \overline{u}_2 \right|}$$

Por lo que es necesario conocer el vector director de cada una de las rectas; así como las coordenadas de un punto cualquiera de L_1 y otro de L_2

Para L_1, como está expresada como la intersección entre dos planos, se tiene que:

$$\overline{u}_1 = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = (4, 4, 6)$$

pero lo único que interesa de este vector es su dirección, así que puede utilizarse como vector director de la primera recta:

$$\overline{u}_1 = (2, 2, 3)$$

Para conocer las coordenadas de un punto de esta primera recta, le damos arbitrariamente el valor de x = 1 en su primera ecuación, con lo que se tiene que y = -3. Con estos valores en su segunda ecuación se obtiene z = -1; de manera que $P_1(1, -3, -1)$

Para L_2, un vector director es $\overline{u}_2 = (0, 2, -3)$ y un punto de dicha recta tiene como vector de posición:

$$\overline{p}_2 = (-3, 4, 1)$$

Entonces:

$$\overline{p}_2 - \overline{p}_1 = (-4, 7, 2)$$

$$\left(\overline{p}_2 - \overline{p}_1 \right) \bullet \overline{u}_1 \times \overline{u}_2 = \begin{vmatrix} -4 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$
$$= -4(-12) - 7(-6) + 2(4) = 98$$

por otra parte:

$$\bar{u}_1 \times \bar{u}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -12i + 6j + 4k$$

$$\left| \bar{u}_1 \times \bar{u}_2 \right| = \sqrt{144 + 36 + 16} = 14$$

entonces:

$d = \dfrac{98}{14} = 7$ unidades de longitud.

Para el cálculo de las coordenadas de P y Q haremos uso del hecho de que $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular tanto a $\bar{u}_1$ como a $\bar{u}_2$, de manera que conviene representar a las dos rectas en forma paramétrica:

$$L_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 2t \quad ; \quad t \in R \\ z = -1 + 3t \end{cases}$$

$$L_2 : \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 + 2r \quad ; \quad r \in R \\ z = 1 - 3r \end{cases}$$

El segmento dirigido de un punto cualquiera de L_1 a un punto cualquiera de L_2 tiene por expresión:

$$\overrightarrow{AB} = (-3 - 1 - 2t,\ 4 + 2r + 3 - 2t,\ 1 - 3r + 1 - 3t) = (-4 - 2t,\ 7 - 2t - 2r,\ 2 - 3t - 3r)$$

pero este vector debe cumplir:

$$\overrightarrow{AB} \bullet \bar{u}_1 = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \bullet \bar{u}_2 = 0$$

entonces:

$$(4 - 2t,\ 7 - 2t + 2r,\ 2 - 3t - 3r) \bullet (2,\ 2,\ 3) = 0$$

$$\left(4-2t,\, 7-2t+2r,\, 2-3t-3r\right)\bullet\left(0,\, 2,\, -3\right)=0$$

efectuando los productos y simplificando queda:

$$\begin{aligned}17t+5r&=12\\ 5t+13r&=-8\end{aligned}$$

resolviendo por medio de la regla de Cramer:

$$t=\frac{\begin{vmatrix}12 & 5\\ -8 & 13\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}17 & 5\\ 5 & 13\end{vmatrix}}=\frac{196}{196}=1$$

$$r=\frac{\begin{vmatrix}17 & 12\\ 5 & -8\end{vmatrix}}{196}=-1$$

sustituyendo los valores de los parámetros en las ecuaciones correspondientes de las rectas, los puntos P y Q tienen por coordenadas:

P(3, -1, 2)   Q(-3, 2, 4)

CONCEPTO PRINCIPAL: Relación entre rectas.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Módulo de un vector.

EJERCICIO V.3. Los puntos A(1, 0, 0), B(0, 1, 0) C(0, 0, 1) y D(1, 1, 1) son los vértices de un tetraedro regular. Determinar las ecuaciones cartesianas en forma simétrica de las seis aristas y calcular el volumen del tetraedro.

SOLUCIÓN:

Arista AD. $\vec{AD}=(0,1,1)$

$$\bar{p}_1=(1,1,1)+t(0,1,1)\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=1\\ y-1=z-1\end{cases};\quad\begin{cases}x=1\\ z=y\end{cases}$$

Arista BD. $\vec{BD}=(1,0,1)$

$$\bar{p}_2=(1,1,1)+t(1,0,1)\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}y=1\\ z=x\end{cases}$$

Arista CD. $\vec{CD} = (1,1,0)$

$$\bar{p}_3 = (1,1,1) + t(1,1,0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z = 1 \\ y = x \end{cases}$$

Arista AB. $\vec{AB} = (-1,1,0)$

$$\bar{p}_4 = (1,0,0) + t(-1,1,0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} \end{cases}; \quad \begin{cases} z = 0 \\ y = -x+1 \end{cases}$$

Arista BC. $\vec{BC} = (0,-1,1)$

$$\bar{p}_5 = (0,1,0) + t(0,-1,1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y-1}{-1} = z \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = -y+1 \end{cases}$$

Arista CA. $\vec{CA} = (-1,0,1)$

$$\bar{p}_6 = (0,0,1) + t(-1,0,1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = -x+1 \end{cases}$$

El volumen puede calcularse de varias maneras:
PRIMERA. Por medio del producto mixto. El volumen del paralelepípedo con aristas DA, DB y DC; considerando en cada una de ellas los segmentos dirigidos $\vec{DA}, \vec{DB}$ y $\vec{DC}$ está dado por:

$$V_P = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = |-1-1| = 2 \text{ unidades de volumen.}$$

Y de la geometría elemental se tiene que el volumen del tetraedro es igual a un sexto del volumen del paralelepípedo; por lo que

$$V_T = \frac{1}{6}(2) = \frac{1}{3} \text{unidades de volumen.}$$

SEGUNDA. De la geometría elemental, también se sabe que el volumen del tetraedro es igual a un tercio del área de la base por la altura. Si se considera como la base del tetraedro al triángulo ABC, como una propiedad del álgebra vectorial se tiene que:

$$Área_{\Delta} = \frac{1}{2}\left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -i - j - k$$

por lo tanto:

$$Área_{\Delta} = \frac{1}{2}\sqrt{1+1+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ unidades de superficie

La altura del tetraedro es igual a la distancia entre el punto D y el plano que contiene al triángulo ABC. Para emplear la expresión:

$$d = \frac{\left| \left(\bar{q} - \bar{p} \right) \bullet \bar{N} \right|}{\left| \bar{N} \right|}$$

consideraremos $\bar{q} - \bar{p} = \vec{AD} = (0,1,1)$

$$\vec{N} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (-1,-1,-1)$$

entonces:

$$d = \frac{\left| (0,1,1) \bullet (-1,-1,-1) \right|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$ unidades de longitud.

Finalmente:

$$V_T = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{3}$$ unidades de volumen.

CONCEPTO PRINCIPAL: Producto vectorial. Producto mixto.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Segmentos dirigidos. Geometría elemental. Volúmenes y áreas de figuras regulares.

EJERCICIO V.4. Determinar las coordenadas del punto Q, simétrico del punto P de coordenadas P(-1, 0, 7) con respecto a la recta de ecuaciones:

$$L:\begin{cases} x-4y-17=0 \\ y-z+7=0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

El punto Q es simétrico de P con respecto a L si la distancia de Q a L es la misma que la de P a L, entendiendo por distancia de un punto a una recta como la que se mide perpendicularmente. Una forma de resolver el ejercicio es primero obteniendo las coordenadas del punto A que pertenece a L y que tiene la mínima distancia. Con el conocimiento de las coordenadas de dicho punto puede obtenerse la distancia entre P y A y con ello sumar al vector de posición de A un vector con la misma dirección de $\overset{\rightarrow}{AP}$, con sentido inverso y con la magnitud igual a la distancia obtenida. Con ello se obtendrá el vector de posición de Q. Ahora bien, para la determinación de las coordenadas de A puede procederse sumándole al vector de posición de un punto cualquiera (B) de L la componente vectorial de $\overset{\rightarrow}{BP}$ en la dirección del vector director de L, que llamaremos $\overline{u}$; es decir:

$$\overline{a}=\overline{b}+comp\,vect\,\overset{\rightarrow}{BP}_{\overline{u}}$$

Las coordenadas de un punto cualquiera de L las tendremos si le asignamos un valor arbitrario a una de las variables en las ecuaciones de la recta y resolvemos el sistema resultante. Por ejemplo, si z = 0 en la segunda de las ecuaciones de L, se tiene

y = -7

Con estos valores en la primera ecuación se tiene $x-4(-7)-17=0$

Por lo que:

$$x=-11$$

las coordenadas de B son B(-11, -7, 0)

Para conocer el vector director de la recta, se multiplican vectorialmente los vectores normales de los planos representados por cada una de las ecuaciones de L:

$$\overline{u}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=4i+j+k$$

entonces:

$$\bar{a}=(-11,-7,0)+\frac{\left[-1-(-11),-(-7),7\right]\bullet(4,1,1)}{\sqrt{16+1+1}}\frac{(4,1,1)}{\sqrt{16+1+1}}=$$

$$=(-11,-7,0)+\frac{(10,7,7)\bullet(4,1,1)}{18}(4,1,1)=$$

$$=(-11,-7,0)+\frac{54}{18}(4,1,1)=$$

$$=(-11,-7,0)+(12,3,3)=$$

$$=(1,-4,3)$$

La distancia entre A y B es:

$d=\sqrt{2^2+16+16}=6$ unidades de longitud.

El segmento dirigido de A a P es:

$$\overrightarrow{AP}=(-2,4,4)$$

entonces:

$$\bar{q}=(1,-4,3)+\frac{(2,-4,-4)}{\sqrt{4+16+16}}(6)=(3,-8,-1)$$

Las coordenadas de Q son Q(3, -8, -1)

CONCEPTO PRINCIPAL: Relaciones entre el punto y la recta.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Componente vectorial de un vector en la dirección de otro. Simetría de puntos. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

EJERCICIO V.5. Sea el plano π de ecuación cartesiana $4x-5y-7z=0$ y sea la recta L de ecuaciones cartesianas en forma simétrica:

$$\frac{x-1}{5}=\frac{2-y}{3}=\frac{z+4}{5}$$

Determinar las coordenadas del punto de intersección entre L y π en caso de que tengan intersección, o bien su distancia, en caso de ser paralelos.

SOLUCIÓN:

Al expresar en forma paramétrica a L queda:

$$L:\begin{cases} x = 1+5t \\ y = 2-3t \quad ; \quad t \in R \\ z = -4+5t \end{cases}$$

sustituyendo en la ecuación de π:

$$4(1+5t)-5(2-3t)-7(-4+5t)-2=0$$
$$4+20t-10+15t+28-35t-2=0$$
$$12=0$$

Como se llegó a una incongruencia, esto significa que no hay intersección entre estos lugares geométricos, lo cual puede comprobarse al multiplicar en forma escalar al vector director $\overline{u}$ de la recta L por le vector normal $\overline{N}$ del plano π:

$$\overline{u} \bullet \overline{N} = (5,-3,5) \bullet (4,-5,-7) = 20+15-35 = 0$$

Lo que se sabe es la condición de perpendicularidad entre vectores, por ello se concluye que la recta y el plano son paralelos. La distancia entre ellos puede calcularse como la distancia de un punto cualquiera de L al plano π:

$$d = \frac{\left| \left(\overline{q} - \overline{p} \right) \bullet \overline{N} \right|}{\left| \overline{N} \right|}$$

Un punto de L es Q(1, 2, -4)

Un punto de π: $P\left(\frac{1}{2}, 2, -4\right)$

Entonces:

$$d = \frac{\left| \left(\frac{1}{2}, 2, -4\right) \bullet (4, -5, -7) \right|}{\sqrt{16+25+49}} =$$
$$= \frac{|2-10+28|}{\sqrt{90}} =$$
$$= \frac{20}{\sqrt{90}} \text{ unidades de longitud.}$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Relaciones entre recta y plano.
CONCEPTOS SECUNDARIOS: Resolución de ecuaciones con una incógnita. Perpendicularidad entre vectores.

EJERCICIO V.6. Determinar las ecuaciones cartesianas en forma simétrica de la recta de intersección entre los planos:

$$\pi_1 : x - 2y + 3z - 1 = 0$$

$$\pi_2 : \overline{p} = (3, -2, 2) + t_1(1, 0, -1) + t_2(0, -1, 1)$$

SOLUCIÓN:

Para la obtención de las ecuaciones de la recta es necesario conocer un punto de ella y su vector director. Ahora bien, como π_2 está expresado en forma vectorial, puede fácilmente expresarse paramétricamente y sustituir las variables x, y, z en la ecuación de π_1. Dando un valor arbitrario a uno de los parámetros se obtiene el valor del otro y con ello las coordenadas de un punto A de la recta. Para el vector director de la recta, podrían multiplicarse vectorialmente los vectores directores de π_2 y con ello se tendría su vector normal $\overline{N}_2$ y posteriormente este último vector multiplicarlo vectorialmente por $\overline{N}_1$; sin embargo, en este caso resulta más sencillo obtener otro punto B de la recta y con el segmento dirigido entre los dos puntos de ella se tendrá el vector director buscado.

De manera que:

$$\pi_2 : \begin{cases} x = 3 + t_1 \\ y = -1 - t_2 \\ z = 2 - t_1 + t_2 \end{cases}$$

sustituyendo en la ecuación de π_2

$$(3 - t_1) - 2(-1 - t_2) + 3(2 - t_1 + t_2) - 1 = 0$$

desarrollando y simplificando:

$$-2t_1 + 5t_2 + 10 = 0 \ldots (1)$$

ahora si $t_1 = 0$ en (1), se tiene que $t_2 = -2$
estos valores en las ecuaciones paramétricas de π_2 y se tiene A(3, 1, 0)

si ahora $t_2 = 0$ en (1), se obtiene $t_1 = 5$

y entonces de nuevo en las ecuaciones paramétricas de π_2 para obtener B(8, -1, -3)

un vector director de la recta es:

$$\bar{u} = \overrightarrow{AB} = (5, -2, -3)$$

finalmente, para las ecuaciones cartesianas en forma simétrica de L se utilizará como punto de apoyo al punto A:

$$L: \left\{ \frac{x-3}{5} = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{-3} \right.$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Relaciones entre planos.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Segmentos dirigidos. Ecuaciones de una recta.

TEMA VI
CURVAS EN EL ESPACIO

EJERCICIO VI.1. Sea la curva de ecuaciones

$$C:\begin{cases} z = \dfrac{1}{y} \\ x = 0 \end{cases}$$

Obtener unas ecuaciones paramétricas de la curva C e identificar la curva.

SOLUCIÓN:

Una parametrización sencilla y práctica se tiene simplemente considerando $y = t$, por lo que:

$$C:\begin{cases} x = 0 \\ y = t\ , \quad t \in R\,, t \neq 0 \\ z = \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

Otra posible parametrización se tendría al considerar que $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$

De manera que si se hace $z = \tan\alpha$ entonces $y = \cot\alpha$ y las ecuaciones paramétricas correspondientes quedarían:

$$C:\begin{cases} x = 0 \\ y = \cot\alpha\,, \quad \alpha \in R\,, \cot\alpha \neq 0 \\ z = \tan\alpha \end{cases}$$

para la identificación de la curva se utilizará en la ecuación $yz = 0$ la expresión $I = B^2 - 4AC$ de la geometría analítica elemental, conocida como "el discriminante":

$$I = (1)^2 - 4(0)(0) = 1$$

Como I > 0, la ecuación es del tipo hipérbola. La existencia del término yz indica que habrá que hacerse una rotación de ejes. Por otra parte, como A = C el ángulo de giro es $\theta = 45^0$, de manera que las ecuaciones de transformación para ese ángulo quedan:

$$y = \frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{2}}$$
$$z = \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{z'}{\sqrt{'2}}$$

sustituyendo en la ecuación correspondiente:

$$\left(\frac{y'-z'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{y'+z'}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

aplicando un producto notable y simplificando:

$$\frac{(y')^2}{2} - \frac{(z')^2}{2} = 1$$

se trata de una hipérbola equilátera con centro en el origen y longitud de semiejes igual a $\sqrt{2}$ unidades de longitud.

CONCEPTO PRINCIPAL: Ecuaciones paramétricas de una curva.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Geometría analítica en el plano. Rotación de ejes. La hipérbola. Álgebra. Productos notables.

EJERCICIO VI.2. Sea la circunferencia con ecuaciones cartesianas:

$$C : \begin{cases} (x+2)^2 + (y-4)^2 = 25 \\ z = -3 \end{cases}$$

Determinar unas ecuaciones paramétricas de esta circunferencia y su correspondiente ecuación vectorial.

SOLUCIÓN:

Al dividir entre 25 ambos miembros de la primera ecuación queda:

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$$

Ahora, haciendo una analogía con la identidad trigonométrica

$$\cos^2 \alpha + sen^2 \alpha = 1$$

si $\dfrac{(x+2)^2}{25} = \cos\ \ \alpha\,,\quad (x+2)^2 = 25\cos^2\ \alpha$

$x+2 = 5\cos\alpha\,,\qquad x = -2+5\cos\alpha$

de manera similar, si $\dfrac{(y-4)^2}{25} = sen^2\alpha$ al desarrollar queda:

$y = 4+5\,sen\,\alpha$

entonces, unas ecuaciones paramétricas de C son:

$$C:\begin{cases} x = -2+5\cos\alpha \\ y = 4+5\,sen\,\alpha \quad , \quad 0\le\alpha<2\pi \\ z = -3 \end{cases}$$

Su ecuación vectorial es $\bar{\bar{r}} = (-2+5\cos\alpha)i + (4+5\,sen\,\alpha)\,j + -3k\,,\quad 0\le\alpha<2\pi$

Otras ecuaciones paramétricas se obtendrían si se considerara:

$$\frac{(x+2)^2}{25} = sen^2\beta\,,\quad \frac{(y-4)^2}{25} = \cos^2\ \beta$$

las ecuaciones quedarían:

$$C:\begin{cases} x = -2+5\,sen\,\beta \\ y = 4+5\cos\beta \quad , \quad 0\le\beta<2\pi \\ z = -3 \end{cases}$$

Y su ecuación vectorial sería: $p = (-2+5\,sen\,\beta)i + (4+5\cos\beta)\,j - 3k\,,\quad 0\le\beta<2\pi$

CONCEPTO PRINCIPAL: Ecuaciones paramétricas y ecuación vectorial de las cónicas.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Geometría analítica plana. La circunferencia. Trigonometría. Identidades trigonométricas.

EJERCICIO VI.3. Determinar el intervalo paramétrico, así como los valores que pueden tener las variables x, y y z de la curva C que tiene como unas ecuaciones paramétricas:

$$C:\begin{cases} x=\sqrt{9-t^2} \\ y=-2 \\ z=\dfrac{1}{\sqrt{t^2-2}} \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Se trata de una curva alojada en el plano $y=-2$; es decir, alojada en un plano paralelo al XZ.

De la primera ecuación se ve que se debe cumplir:

$$9-t^2 \geq 0, \quad t^2 \leq 9 \quad \Rightarrow \quad -3 \leq t \leq 3$$

ahora, de la tercera ecuación:

$$t^2-2>0, \quad t>\sqrt{2} \quad ó \quad t<-\sqrt{2}$$

en este caso se excluye la posibilidad de la igualdad porque la división entre cero no existe.

Por lo que, el intervalo paramétrico es:

$$I=\left\{-3 \leq t < -\sqrt{2} \cup \sqrt{2} < t \leq 3, t \in R\right\}$$

De la primera ecuación:

$$x=\sqrt{9-t^2}; \quad x^2=9-t^2, \quad x^2+t^2=9$$

se trata de la semicircunferencia con centro en el origen y radio igual a tres. Es la mitad de la circunferencia por el signo positivo que antecede a la raíz cuadrada. Por otra parte, en virtud de los valores que puede tomar el parámetro por el intervalo paramétrico, se tiene que para $t=\pm 3, \quad x=0$; y para $t=\pm\sqrt{2}, \quad x=\sqrt{7}$. Se considera el signo positivo porque estamos trabajando con la semicircunferencia.. Entonces, el conjunto de valores de x es:

$$X=\left\{0 \leq x < \sqrt{7}, \quad x \in R\right\}$$

La variable y solamente puede tomar el valor dos de acuerdo con la segunda ecuación paramétrica de la curva.

Para la variable z se tiene que si $t = \pm 3$, $z = \frac{1}{\sqrt{7}}$. Además, conforme t se aproxima al valor de dos o de menos dos, z aumenta rápidamente su valor; es decir: *si* $t \to 2$, entonces $z \to \infty$ o bien si $t \to -2$, $z \to \infty$

Y el conjunto de valores de z es:

$$Z = \left\{ \frac{1}{\sqrt{7}} \le z < \infty; \quad z \in R \right\}$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Intervalo paramétrico.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Geometría analítica plana. La circunferencia. Álgebra. Desigualdades. Conjuntos.

EJERCICIO VI.4. Determinar unas ecuaciones paramétricas de una curva C cuya cota es igual a más menos cuatro tercios la raíz cuadrada de nueve unidades menos el cuadrado de su ordenada y su abscisa es siempre igual a menos uno. Además, calcule las coordenadas de al menos tres puntos de la curva.

SOLUCIÓN:

Del enunciado, al traducir del lenguaje común al lenguaje algebraico y *parametrizando* $y = t$:

$$z = \pm \frac{4}{3}\sqrt{9 - t^2}$$

entonces, las ecuaciones paramétricas quedan:

$$C: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = \pm \frac{4}{3}\sqrt{9 - t^2} \end{cases} ; \quad -3 \le t \le 3, \quad t \in R$$

El intervalo paramétrico se obtiene directamente de la tercera ecuación puesto que para las otras dos no hay restricción.

Ahora, si $t = 0$, $z = \pm \frac{4}{3}\sqrt{9} = \pm 4$

De aquí se tienen las coordenadas de dos puntos:

$P_1(-1, 0, 4)$; $P_2(-1, 0, -4)$

para las coordenadas de otro punto, ahora consideremos $t = 3$:

$$z = \pm\frac{4}{3}(0) = 0$$

$\therefore P_3(-1, 3, 0)$

si $t = -3$

$$z = \pm\frac{4}{3}(0) = 0$$

entonces: $\therefore P_4(-1, -3, 0)$

CONCEPTO PRINCIPAL: Ecuaciones paramétricas de una curva. Intervalo paramétrico.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Álgebra. Traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico. Sustitución de valores en una ecuación.

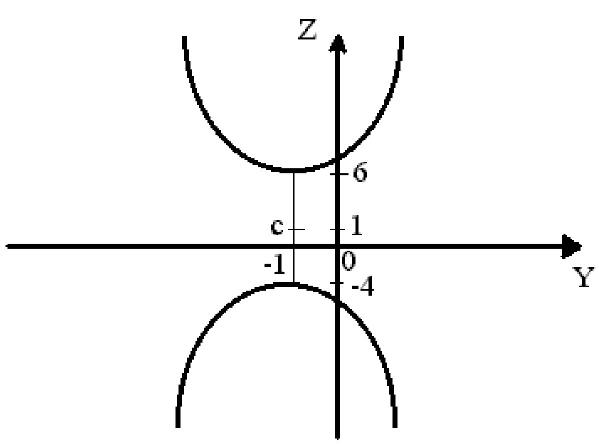
EJERCICIO VI.5. Sea la curva de ecuaciones:

$$H : \begin{cases} x = 2 \\ \dfrac{(z-1)^2}{25} - \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1 \end{cases}$$

Obtener unas ecuaciones paramétricas de H de tal manera que $y \le -1, \quad z \ge 6$

SOLUCIÓN:

Al analizar las ecuaciones de H se observa que se trata de una hipérbola alojada en el plano $x = 2$, que es paralelo al YZ. Su gráfica es:



Por los valores de restricción, lo que se desea es representar una cuarta parte de la hipérbola. Para la parametrización, y dado que se tiene una diferencia de cuadrados igualada a la unidad, se hará una analogía con la identidad trigonométrica:

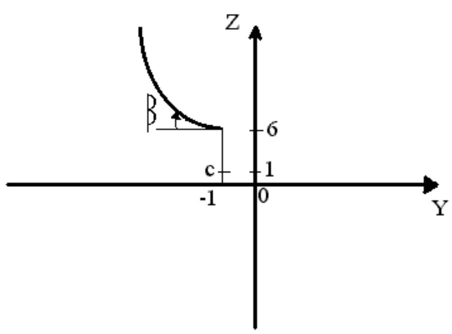
$$\sec^2 \beta - \tan^2 \beta = 1$$

Para ello se considera:

$$\frac{(z-1)^2}{25} = \sec^2 \beta \qquad \Rightarrow \qquad z = 1 + 5\sec\beta$$

$$\frac{(y+1)^2}{16} = \tan^2 \beta \qquad\qquad y = -1 + 4\tan\beta$$

Ahora observamos que si $\beta = 0$, $z = 6$, $y = -1$ de manera que el punto representado es uno de los vértices de la hipérbola y si β toma valores mayores a cero, puede observarse que se recorre una de las ramas de dicha curva, por lo que se deduce que el ángulo β es el que se muestra en la siguiente figura:



de esto se deduce que para representar al cuarto de hipérbola requerido se debe tener:

$$0 \leq \beta < \frac{\pi}{2}$$

Con este análisis ya queda completa la parametrización:

$$H : \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + 4\tan\beta ; \quad 0 \leq \beta < \dfrac{\pi}{2} \\ z = 1 + 5\sec\beta \end{cases}$$

Otra parametrización se puede tener si se trabaja con la segunda ecuación cartesiana:

$$\frac{(z-1)^2}{25}-\frac{(y+1)^2}{16}=1, \quad 16(z-1)^2-25(y+1) \;=400$$

al despejar a z :

$$z=1\pm\frac{5}{4}\sqrt{(y+1)^2+16}$$

se puede ahora considerar a $y=t$ y entonces $t\leq -1$: puesto que corresponde el parámetro a la ordenada. Las cotas en términos del parámetro quedan:

$$z=1+\frac{5}{4}\sqrt{(y+1)^2+16}$$

el signo ya no tiene la ambigüedad puesto que se debe cumplir con la restricción $z\geq 6$

la parametrización queda:

$$H:\begin{cases} x=2 \\ y=t & ; \quad t\leq -1 \\ z=1+\frac{5}{4}\sqrt{(t+1)^2+16} \end{cases}$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Ecuaciones paramétricas de las cónicas.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Geometría analítica plana. La hipérbola. Trigonometría. Identidades trigonométricas. Álgebra elemental. Fracciones.

EJERCICIO VI.6. Sea la curva C, representada en forma paramétrica por:

$$C:\begin{cases} x=\cos 2\theta \quad \ldots(1) \\ y=-5 \quad \ldots(2) & ; \quad 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \\ z=3\,sen\theta\cos\theta \quad \ldots(3) \end{cases}$$

Determinar la expresión cartesiana de C e identificarla.

SOLUCIÓN:

Se trata de una curva alojada en el plano $y=-5$, paralelo al XZ. Como θ varía entre cero y pi sobre dos, se tiene que el argumento de la función coseno, de la ecuación descriptiva de la variable x, varía entre menos uno y uno.

Por otra parte, para obtener la expresión cartesiana de la curva, en la tercera ecuación puede hacerse:

$$z = 3\, sen\theta \cos\theta =$$
$$= \frac{3}{2}\, 2\, sen\theta \cos\theta =$$
$$= \frac{3}{2}\, sen\, 2\theta \ldots (4)$$

Ahora, de las ecuaciones (1) y (4):

$$\cos 2\theta = x$$
$$sen\, 2\theta = \frac{2z}{3}$$

elevando al cuadrado, sumando e igualando con uno:

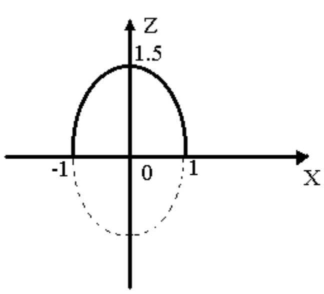
$$\cos^2 2\theta + sen^2 2\theta = x^2 + \frac{4z^2}{9} = 1, \quad x^2 + \frac{z^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

además, como $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $\quad 0 \le z \le \frac{3}{2}$

por lo que la expresión cartesiana de la curva es:

$$C : \begin{cases} x^2 + \dfrac{z^2}{\frac{9}{4}} = 1 \\ y = -5 \end{cases} ; \quad -1 \le x \le 1, \quad 0 \le z \le \frac{3}{2}$$

Se trata de una semielipse, con centro en el origen, semieje mayor igual a tres medios y semieje menor igual a la unidad.



CONCEPTO PRINCIPAL: Ecuaciones cartesianas de una curva plana en el espacio, obtenidas a partir de sus ecuaciones paramétricas.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Trigonometría. Identidades trigonométricas. Valores de las funciones trigonométricas. Geometría analítica plana. La elipse. Características geométricas.

EJERCICIO VI.7. Sea la curva:

$$C:\begin{cases} x=0 & \ldots(1) \\ y=2(1-t) & \ldots(2), \quad t\in R \\ z=-4t^2 & \ldots(3) \end{cases}$$

Obtener la expresión cartesiana de C e identificarla.

SOLUCIÓN:

De la ecuación (2):

$$(1-t)=\frac{y}{2}, \qquad t=1-\frac{y}{2}$$

sustituyendo en (3):

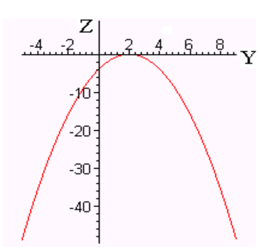
$$z=-4\left(1-\frac{y}{2}\right)^2=$$
$$=-4\left(\frac{2-y}{2}\right)^2=$$
$$=-(y-2)^2$$

Este último paso puede hacerse puesto que $(2-y)^2=(y-2)^2$

Entonces:

$$C:\begin{cases} (y-2)^2=-z \\ x=0 \end{cases}$$

Se trata de la parábola con vértice en V(0, 2, 0), su eje paralelo al eje Z y abre hacia la parte negativa de dicho eje. La parábola está alojada en el plano YZ.



CONCEPTO PRINCIPAL: Ecuaciones cartesianas de una curva plana en el espacio, obtenidas a partir de sus ecuaciones paramétricas.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Álgebra elemental. Resolución de ecuaciones simultáneas. Geometría analítica plana. La parábola, sus características geométricas.

EJERCICIO VI.8. La curva llamada *"bruja de Agnesi"* tiene por ecuaciones paramétricas:

$$B:\begin{cases} x = 2a\cot\theta \quad \dots(1) \\ y = a\left(1-\cos 2\theta\right) \quad \dots(2)\,; \quad 0<\theta<\pi \\ z = 0 \quad \dots(3) \end{cases}$$

Demostrar que sus ecuaciones en forma cartesiana son:

$$B:\begin{cases} y = \dfrac{8a^3}{x^2+4a^2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Como $z=0$, la curva se localiza en el plano XY, por ello se trabajará solamente con las ecuaciones (1) y (2):
De (2):

$$\frac{y}{a} = 1-\cos 2\theta$$

$$\cos 2\theta = 1-\frac{y}{a}$$

ahora, tomando en cuenta la identidad trigonométrica:

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - sen^2\theta$, la expresión queda:

$$\cos^2\theta - sen^2\theta = 1-\frac{y}{a} \quad \dots (4)$$

pero, también por identidad trigonométrica se tiene que $sen^2\theta = 1-\cos^2\theta$. Al sustituir este valor en la ecuación (4):

$$\cos^2\theta - \left(1-\cos^2\theta\right) = 1-\frac{y}{a}$$

despejando $\cos^2\theta$:

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{y}{2a} \quad ...\ (5)$$

De la última identidad se tiene también: $\cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$

Llevando esta valor a (4):

$$1 - sen^2\theta - sen^2\theta = 1 - \frac{y}{a}$$

de donde:

$$sen^2\theta = \frac{y}{2a} \quad ...\ (6)$$

Por otra parte, de la ecuación (1):

$$x = 2a\frac{\cos\theta}{sen\theta}$$

multiplicando en ambos miembros por $sen\theta$:

$$x\, sen\theta = 2a\cos\theta$$

elevando ambos lados a la segunda potencia:

$$x^2 sen^2\theta = 4a^2\cos^2\theta \quad ...(7)$$

(5) y (6) en (7):

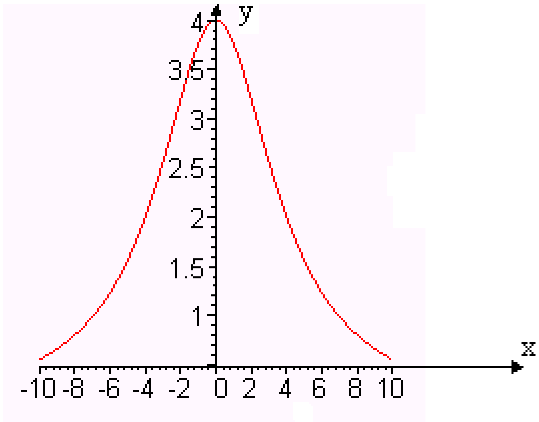
$$x^2\left(\frac{y}{2a}\right) = 4a^2\left(1 - \frac{y}{2a}\right)$$

simplificando, despejando y y tomando en cuenta la ecuación (3), la expresión cartesiana de la bruja queda:

$$:\ B : \begin{cases} x = 2a\cot\theta & \ldots(1) \\ y = a(1-\cos 2\theta) & \ldots(2)\ ; \quad 0 < \theta < \pi \\ z = 0 & \ldots(3) \end{cases}$$

con lo que queda demostrado.

Aquí se presenta la gráfica de esta curva:



CONCEPTO PRINCIPAL: Ecuaciones cartesianas de una curva plana en el espacio, obtenidas a partir de sus ecuaciones paramétricas.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Trigonometría. Identidades trigonométricas. Álgebra elemental. Sustituciones y despejes.

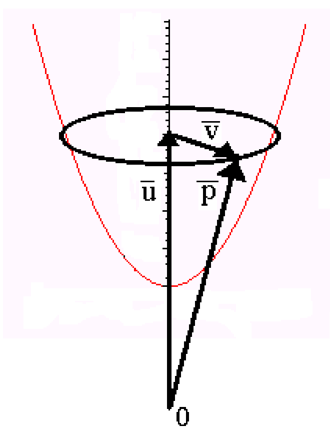
TEMA VII
SUPERFICIES

EJERCICIO VII.1. Obtener una ecuación vectorial del hiperboloide de dos mantos con ecuación cartesiana; así mismo, determinar sus respectivas ecuaciones paramétricas:

$$\frac{z^2}{49}-\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{25}=1 \quad \ldots (1)$$

SOLUCIÓN:

Para la determinación de una ecuación vectorial se puede tener como vector representativo de todos los vectores de posición que tocan a la superficie, al que resulta de la suma de $\bar{u}+\bar{v}$, ver figura.



Como apoyo para estos vectores puede emplearse la traza de la superficie con el plano YZ, con ecuaciones:

$$T:\begin{cases}\dfrac{z^2}{49}-\dfrac{y^2}{25}=1\\ x=0\end{cases}$$

al considerar la identidad trigonométrica: $\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1$

si $\dfrac{z^2}{49}=\sec^2\alpha$, $\quad \dfrac{y^2}{25}=\tan^2\alpha$

nos conduce a:

$z=7\sec\alpha$, $\quad y=5\tan\alpha$

por lo que el vector $\overline{u}$ tiene por componentes:

$$u = 7\sec\alpha\, \overline{k}$$

Por otra parte, el vector $\overline{v}$ es aquel que recorre la circunferencia con radio $r = y = 5\tan\alpha$, entonces:

$$\overline{v} = 5\tan\alpha\cos\theta\, i + 5\tan\alpha\, sen\theta\, j$$

por lo que:

$$\overline{v} = 5\tan\alpha\cos\theta\, i + 5\tan\alpha\, sen\theta\, j + 7\sec\alpha\,, \quad 0 \le \alpha < 2\pi\,, \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

Las correspondientes ecuaciones paramétricas son:

$$H: \begin{cases} x = 5\tan\alpha\cos\theta \\ y = 5\tan\alpha\, sen\theta\,, \quad 0 \le \alpha < 2\pi\,, \quad 0 \le \theta < 2\pi \\ z = 7\sec\alpha \end{cases}$$

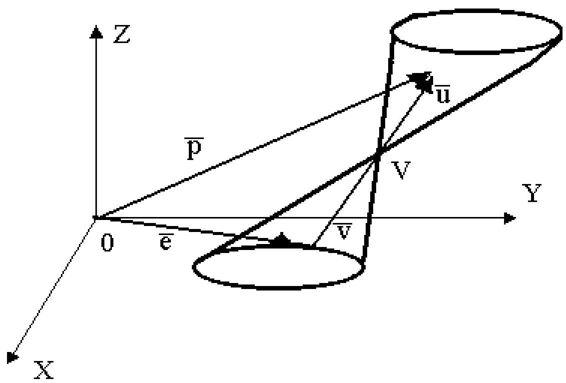
CONCEPTO PRINCIPAL: ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas de una superficie cuádrica.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Geometría analítica plana. La hipérbola. Trigonometría. Identidades trigonométricas. Álgebra. Cantidades paramétricas.

EJERCICIO VII.2. Determinar una ecuación vectorial y sus correspondientes ecuaciones paramétricas del cono que tiene como vértice al punto de coordenadas $V(6,7,8)$ y cuya traza con el plano XY es la elipse de ecuaciones

$$E: \begin{cases} 4(x-3)^2 + (y-5)^2 = 16 \\ z = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Un vector de posición que *barra* toda la superficie cónica se puede representar como la suma de un vector $\overline{e}$ que toca en cualquier punto a la elipse E, más un vector $\overline{u}$ que tiene la dirección del punto de la elipse al vértice V y con magnitud variable.



$\overline{p} = \overline{e} + \overline{u} = \overline{e} + \beta\, \overline{v}$

Los vectores de posición que representan a los puntos de la elipse E pueden obtenerse:

De la primera de las ecuaciones de la elipse se tiene:

$$4(x-3)^2 + (y-5)^2 = 16 \quad , \quad \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$$

haciendo analogía con la identidad trigonométrica: $\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$,

si $\dfrac{(x-3)^2}{4} = \cos^2\alpha \quad , \quad \dfrac{(y-5)^2}{16} = sen^2\alpha$

se puede tener que: $x = 3 + \cos\alpha \quad , \quad y = 5 + 4\,sen\alpha$

$$\therefore\ \overline{e} = (3 + 2\cos\alpha)i + (5 + 4\,sen\alpha)\,j \quad , \quad 0 \le \alpha < 2\pi$$

Por otra parte, un segmento dirigido que va de algún punto de E hacia el vértice del cono tiene por componentes:

$$\overline{v} = (6 - 3 - 2\cos\alpha)i + (7 - 5 - 4\,sen\alpha)\,j + 8\,k = (3 - 2\cos\alpha)i + (2 - 4\,sen\alpha)\,j + 8\,k$$

Para hacer variable su magnitud, multiplicamos por un parámetro $\beta \in R$:

$$\overline{u} = \beta\,\overline{v} = \beta(3 - 2\cos\alpha)i + \beta\,(2 - 4\,sen\alpha)\,j + 8\beta\,k$$

finalmente, una ecuación vectorial de la superficie es:

$$\overline{p} = [3 + 2\cos\alpha + \beta(3 - 2\cos\alpha)]i + [5 + 4sen\alpha + \beta(2 - 4sen\alpha)]\, j + 8\beta\, k$$

y sus correspondientes ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = [3 + 2\cos\alpha + \beta(3 - 2\cos\alpha)] \\ y = [5 + 4sen\alpha + (2 - 4sen\alpha)] \\ z = 8\beta \end{cases} \quad , \quad 0 \le \alpha < 2\pi \ , \ \beta \in R$$

CONCEPTO PRINCIPAL: ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas de una superficie cuádrica.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Geometría analítica. La elipse. Trigonometría. Identidades trigonométricas. Álgebra vectorial.

EJERCICIO VI.3. Identificar la superficie con ecuación cartesiana $y^2 - z^2 - 4y - 8z = 12$

SOLUCIÓN:

Al completar cuadrados:

$$y^2 - 4y + 4 - (z^2 + 8z + 16) = 12 + 4 - 16$$

$$(y-2)^2 - (z+4)^2 = 0$$

por lo que:

$$(z+4)^2 = (y-2)^2$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros:

$$z + 4 = \pm(y-2)$$

se trata de dos planos.

Para el signo positivo:

$$z + 4 = y - 2$$

entonces:

$$\pi_1 : \quad z = y - 6$$

ahora, para el signo negativo:

$\pi_2: \quad z = -y - 2$

son dos planos que se cortan y que son paralelos al eje X.

CONCEPTO PRINCIPAL: Clasificación de superficies. Superficies cuádricas.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Álgebra. Completar cuadrados. Geometría analítica. El plano.

EJERCICIO VII.4. Identificar a la superficie de ecuación cartesiana:

$$4x^2 - 24xy + 11y^2 + 2z^2 = 16 \quad \ldots (1)$$

SOLUCIÓN:

La presencia del término $-24xy$ significa que el o los ejes de la superficie son oblicuos con respecto al sistema cartesiano XYZ. Para identificar a la superficie, primero se estudiarán sus trazas con planos paralelos a los coordenados.

- Planos paralelos a XY:

Si $z = k_1$

$$4x^2 - 24xy + 11y^2 = 16 - 2k_1^2 \quad \ldots (2)$$

El discriminante es $I = B^2 - 4AC$, en este caso:

$$I = (-24)^2 - 4(4)(11)$$

que resulta ser mayor que cero, por lo que se trata de una ecuación tipo hipérbola.

Se hará una rotación de ejes. El ángulo de rotación se obtiene de la expresión:

$$\theta = \frac{1}{2} ang \tan \frac{B}{A-C}$$

que para este caso:

$$\theta = \frac{1}{2} ang \tan \frac{-24}{4-11} \approx 36.87^0$$

ahora, para la aplicación de las ecuaciones de transformación se necesita:

$$sen\theta = 0.6 \quad \cos\theta = 0.8$$

si llamamos u y v a los nuevos ejes de referencia se tiene que:

$$x = 0.8u - 0.6v$$
$$y = 0.6u + 0.8v$$

sustituyendo en (2):

$$4\left(0.8u - 0.6v\right)^2 - 24\left(0.8u - 0.6v\right)\left(0.6u + 0.8v\right) + 11\left(0.6u + 0.8v\right)^2 = 16 - 2k_1^2$$

desarrollando y simplificando:

$$-5u^2 + 20v^2 = 16 - 2k_1^2$$

por lo que se confirma que se trata de hipérbolas, salvo el caso en que $z = \pm\sqrt{8}$ en que se tienen dos rectas que se cortan.

- Planos paralelos al XZ.

Si $y = k_2$

$$4x^2 - 24k_2 x + 11k_2^2 + 2z^2 = 16$$

Se completan cuadrados:

$$4\left(x^2 - 6k_2 x + 9k_2^2\right) + 2z^2 = 16 + 36k_2^2 - 11k_2^2$$

$$4\left(x - 3k_2\right)^2 + 2z^2 = 16 + 25k_2^2$$

se trata de una familia de elipses para cualquier valor de y, con abscisa de su centro variable y longitud de sus semiejes variable.

- Planos paralelos al YZ.

Si $x = k_3$.

$$4k_3^2 - 24k_3 y + 11y^2 + 2z^2 = 16$$

$$11\left(y - \frac{24}{11}k_3 y + \frac{144}{121}k_3^2\right) + 2z^2 = 16 + \frac{144}{121}k_3^2 - 4k_3^2$$

$$11\left(y - \frac{12}{11}k_3\right)^2 + 2z^2 = 16 + \frac{100}{11}k_3^2$$

También son elipses para cualquier valor de x, sólo que éstas tienen ordenada de sus centros variable y longitud de semiejes variable.

Se intuye que se trata de un hiperboloide de un manto y, debido a la rotación de sus ejes, sus trazas en los dos últimos casos son elipses. Para comprobarlo, apliquemos el giro a la ecuación (1):

$$4(0.8u-0.6v)^2-24(0.8u-0.6v)(0.6u+0.8v)+11(0.6u+0.8v)^2+2z^2=16$$

De nuevo desarrollamos y simplificamos y resulta:

$$-5u^2+20v^2+2z^2=16$$

y se verifica que es un hiperboloide elíptico de un manto.

CONCEPTO PRINCIPAL: Determinación de las características de una superficie cuádrica (identificación) a partir de su ecuación cartesiana.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Geometría analítica. Rotación de ejes. La elipse. La hipérbola. Álgebra. Completar cuadrados. Trigonometría. Valores de las funciones trigonométricas.

EJERCICIO VII.5. Sea la superficie que tiene como una de sus ecuaciones vectoriales:

$$\overline{r}=(10+2\cos\alpha)\cos\beta\, i+(10+2\cos\alpha)sen\beta\; j+2\,sen\alpha\; k$$
$$0\le\alpha<2\pi\,,\quad 0\le\beta<2\pi$$

a) Determinar sus correspondientes ecuaciones paramétricas;
b) Identificar la traza de la superficie con el plano XY;
c) Obtener la ecuación cartesiana de la superficie;
d) Identificar la superficie.

SOLUCIÓN:

a) De la ecuación vectorial se tiene:

$$S:\begin{cases} x=(10+2\cos\alpha)\cos\beta & \ldots(1) \\ y=(10+2\cos\alpha)sen\beta & \ldots(2)\,,\quad 0\le\alpha<2\pi \\ z=2\,sen\alpha & \ldots(3)\quad\ \ 0\le\beta<2\pi \end{cases}$$

b) La traza de la superficie con el plano XY se tiene cuando $z=0$
de manera que:

$2\,sen\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \quad ó \quad \alpha = \pi$

para $\alpha = 0$:

$$x = (10+2)\cos\beta \Rightarrow \quad x = 12\cos\beta$$
$$y = (10+2)\,sen\beta \qquad y = 12\,sen\beta$$

se trata de una circunferencia con centro en el origen y radio igual a doce.

Ahora para $\alpha = \pi$:

$$x = (10-2)\cos\beta$$
$$y = (10-2)\,sen\beta$$

$$x = 8\cos\beta$$
$$y = 8\,sen\beta$$

ahora es otra circunferencia con centro en el origen y radio igual a ocho.

c) De (1) y (2):

$$\cos\beta = \frac{x}{10+2\cos\alpha} \quad , \quad sen\beta = \frac{y}{10+2\cos\alpha}$$

elevando al cuadrado, sumando e igualando con la unidad:

$$\frac{x^2}{(10+2\cos\alpha)} + \frac{y^2}{(10+2\cos\alpha)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = (10+2\cos\alpha)^2$$

$$10 + 2\cos\alpha = \pm\sqrt{x^2+y^2}$$

de donde:

$$\cos\alpha = \frac{\pm\sqrt{x^2+y^2} - 10}{2} \quad \ldots(4)$$

de (3):

$$sen\alpha = \frac{z}{2}$$

aplicando de nuevo la misma identidad trigonométrica:

$$\frac{\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}-10\right)^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$$

$$\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}-10\right)^2+z^2=4$$

d) Para la identificación de la superficie, se observa que ésta es simétrica con respecto a los tres planos coordenados, dado que al sustituir a cualquiera de las variables por su valor negativo, la ecuación no se altera. También es simétrica con respecto a los tres ejes coordenados y con respecto al origen. A continuación hagamos un análisis de las trazas de la superficie con planos paralelos a los coordenados:

- Planos paralelos al plano XY:

Si $z=\mu$:

$$\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}-10\right)^2=4-\mu$$

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}-10=\pm\sqrt{4-\mu^2}$$

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=10\pm\sqrt{4-\mu^2}$$

$$x^2+y^2=\left(10\pm\sqrt{4-\mu^2}\right)^2$$

se trata de pares de circunferencias concéntricas para $-2<z<2$ y una sola circunferencia para $z=-2$ ó para $z=2$. Fuera de este intervalo no existe la superficie.

- Traza con el plano YZ:

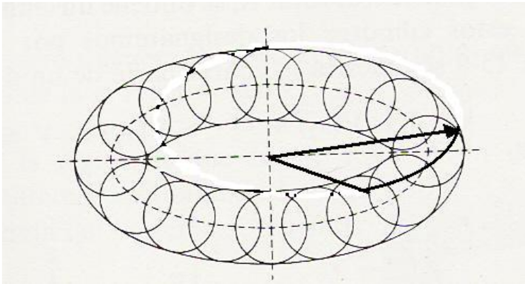
Si $x=0$, $\quad (\pm y-10)^2+z^2=4$

Para el signo positivo se tiene $(y-10)^2+z^2=4$ que es una circunferencia con centro en (10, 0) y radio dos.

Para el signo negativo $(-y-10)^2+z^2=4$ que es equivalente a $(y+10)^2+z^2=4$, es otra circunferencia pero con centro en (-10, 0) y mismo radio.

Para la traza con el plano XZ se tiene similar situación.

Con esta información puede deducirse que se trata de un toro o toroide.



CONCEPTO PRINCIPAL: Determinación de las características de una superficie cuádrica (identificación).
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Geometría analítica. La circunferencia. Álgebra. Completar cuadrados. Leyes de los signos.

EJERCICIO VII.6. Sea la ecuación vectorial que representa a la superficie:

$$\bar{p} = (2+r)i + (t+2r)\,j + \left(4r - \frac{(t-3)^2}{12}\right)k\,; \quad t, r \in R$$

Determinar la ecuación cartesiana de la superficie e identificarla.

SOLUCIÓN:

Las ecuaciones paramétricas de la superficie son:

$$S : \begin{cases} x = 2 + r \quad \ldots(1) \\ y = t + 2r \quad \ldots(2) \\ z = 4r - \dfrac{(t-3)^2}{12} \quad \ldots(3) \end{cases}$$

de (1), $r = x - 2$, en (2) y en (3):

$$y = t + 2(x-2) = t + 2x - 4 \quad \ldots(5)$$
$$z = 4(x-2) - \frac{(t-3)^2}{12} = 4x - 8 - \frac{(t-3)^2}{12} \quad \ldots(6)$$

ahora, despejando t de (4):

$$t = y - 2x + 4$$

sustituyendo en (5):

$z = 4x - 8 - \dfrac{(y - 2x + 1)^2}{12}$ que es la ecuación cartesiana de la superficie, la cual puede simplificarse, quedando:

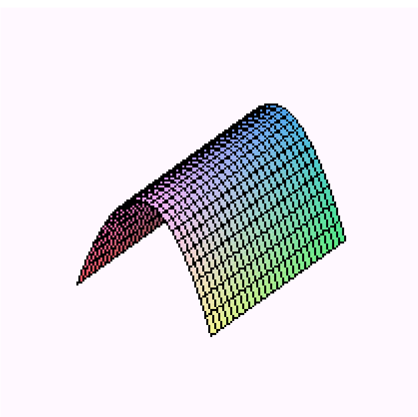
$$(y - 2x + 1)^2 = 12(4x - z - 8)$$

Para su identificación, analicemos las trazas de la superficie con planos paralelos al YZ, de manera que si $x = \alpha$:

$$(y - 2\alpha + 1)^2 = 12(4\alpha - z - 8)$$

como puede observarse se trata de una familia de parábolas que conservan sus características geométricas al desplazarse en planos paralelos al YZ y solamente cambian las coordenadas de su vértice, de lo que se deduce que es un cilindro parabólico.

CONCEPTO PRINCIPAL: Ecuación cartesiana de una superficie a partir de una de sus ecuaciones vectoriales. Identificación de una superficie.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Álgebra. Manejo de ecuaciones simultáneas. Geometría analítica. La parábola, sus características geométricas.



EJERCICIO VII.7. Sea la superficie S de ecuación cartesiana

$$S: \quad 3x^2 + 4(z - 2)^2 = 2(y - 5)$$

a) Identificar la superficie;
b) Determinar la ecuación cartesiana de la superficie simétrica a S con respecto al plano XZ;
c) Determinar la ecuación cartesiana de la superficie simétrica a S con respecto al eje Y.

SOLUCIÓN:

a) La identificación de la superficie puede hacerse simplemente observando la forma de su ecuación y los signos de los coeficientes. Se trata de un paraboloide elíptico con eje paralelo al eje Y y que abre hacia la parte positiva de dicho eje. El vértice del paraboloide se localiza en V(0, 5, 2).

También, esta identificación puede hacerse auxiliándose de las trazas de S con planos paralelos a los coordenados:

Con planos paralelos al XZ, considerando $y = k$:

$$3x^2 + 4(z-2)^2 = 2(k-5)$$

se trata de una familia de elipses para $k > 5$ y un punto para $k = 5$.

Ahora con planos paralelos al XY, si $z = m$:

$$3x^2 + 4(m-2)^2 = 2(y-5)$$

en este caso es una familia de parábolas.

Finalmente con planos paralelos al YZ, si $x = n$:

$$3n^2 + 4(z-2)^2 = 2(y-5)$$

de nuevo es una familia de parábolas de lo que se puede concluir que es un paraboloide elíptico.

b) Dos puntos simétricos con respecto al plano XZ tienen las mismas abscisas y las misma cotas pero sus ordenadas tiene el mismo valor absoluto pero son de diferente signo, de manera que para obtener la ecuación de la superficie deseada, se sustituye $-y$ por y:

$$S_1: \quad 3x^2 + 4(z-2)^2 = -2(y+5)$$

c) Dos puntos simétricos con respecto al eje Y tienen, para una misma ordenada, su abscisa y su cota cambiadas de signo, así que para la obtención de la superficie simétrica se sustituye $-x$ por x y $-z$ por z:

$$S_2: \quad 3x^2 + 4(z+2)^2 = 2(y-5)$$

CONCEPTO PRINCIPAL: Determinación de las características de una superficie cuádrica (identificación). Simetría de puntos.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Geometría analítica. La parábola, sus características. La elipse, sus características. Sistema cartesiano en tres dimensiones.

EJERCICIO VII.8. Sea la superficie S con ecuación cartesiana

$$y^2 + 2yz + z^2 - x^2 + 5 = 0 \quad \ldots(1)$$

Determinar su extensión para cada uno de los ejes coordenados.

SOLUCIÓN:

Para determinar la extensión S con respecto a los ejes, se usará el análisis de las trazas de S con planos paralelos a los coordenados.

- Con respecto al eje x. Si $x = k$:

$$y^2 + 2yz + z^2 - k^2 + 5 = 0$$
$$y^2 + 2yz + z^2 = k^2 - 5 \quad \ldots(2)$$

el valor del discriminante $I = B^2 - 4AC$ en este caso es:

$$I = 2^2 - 4(1)(1) = 0$$

es una ecuación tipo parábola.

Se hará una transformación de coordenadas por medio de un giro. El ángulo de rotación se obtiene por medio de $\theta = \frac{1}{2} ang \tan \frac{B}{A-C}$, si $A \neq C$, pero $\theta = 45^0$ en este caso en que $A = C = 1$,

De manera que las ecuaciones de transformación para un nuevo sistema UV quedan:

$$y = \frac{u}{\sqrt{2}} - \frac{v}{\sqrt{2}} = \frac{u-v}{\sqrt{2}}$$
$$z = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$$

sustituyendo en (2):

$$\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{u-v}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2 = k^2 - 5$$

desarrollando y simplificando:

$$2u^2 = k^2 - 5$$

se trata de dos rectas paralelas ya que:

$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{k^2 - 5}$$

los valores de x para los cuales existen estas rectas son:

$$-\infty < x < -\sqrt{5} \cup \sqrt{5} < x < \infty$$

y se tiene el caso particular de una sola recta para $x = -\sqrt{5}$ y para $x = \sqrt{5}$.

- Con respecto al eje Y. Ahora si $y = k$:

$$k^2 + 2kz + z^2 - x^2 + 5 = 0$$
$$z^2 + 2kz - x^2 = -5 - k^2$$

completando cuadrados:

$$z^2 + 2kz + k^2 - x^2 = -5 - k^2 + k^2$$
$$(z + k)^2 - x^2 = -5$$
$$\frac{x^2}{5} - \frac{(z+k)}{5} = 1$$

son hipérbolas con eje transverso paralelo al eje X, longitud de semiejes constante y centro de las hipérbolas con cota variable.

La extensión en Y es

$$y \in R$$

- Con respecto al eje Z. Si se tiene ahora $z = k$:

$$y^2 + 2yk + k^2 - x^2 + 5 = 0$$

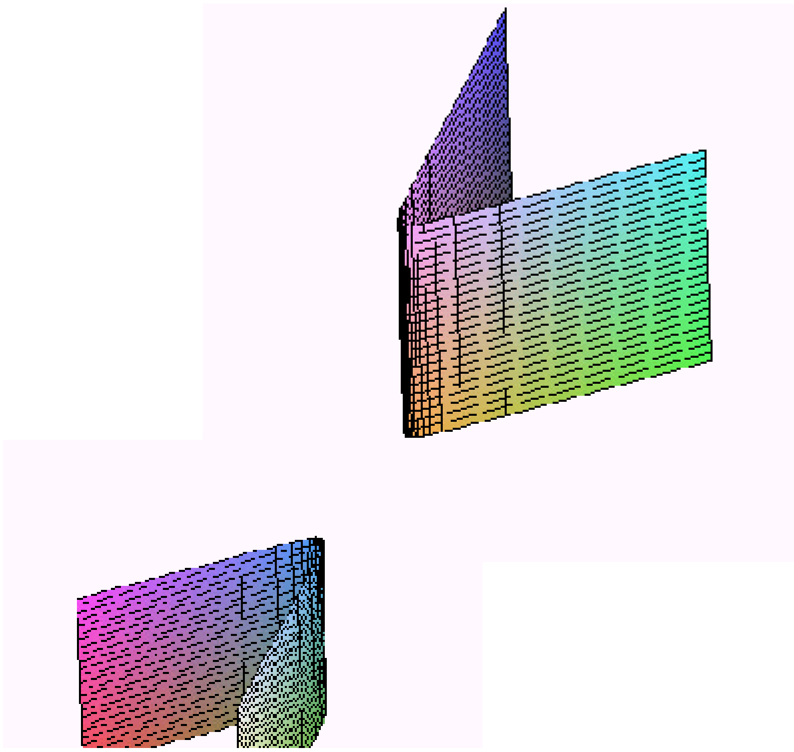
la expresión es similar a la que se obtuvo para el caso del eje Y, puesto que las variables y y z juegan papel equivalente en la ecuación de la superficie, de manera que con un desarrollo análogo se tendría:

$$\frac{x^2}{5} - \frac{(y+k)}{5} = 1$$

por lo que la extensión en Z es:

$z \in R$

Como conclusión, la superficie es un cilindro hiperbólico oblicuo.



EJERCICIO VII.9. Obtener la ecuación de la superficie que se genera con elipses contenidas en planos paralelos al YZ, centro en la recta

$$R:\begin{cases} y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

y que se apoyan el las curvas:

$$C_1:\begin{cases} (y-1)^2 = 9(x-3) & \ldots(1) \\ z = -2 & \ldots(2) \end{cases}$$

$$C_2:\begin{cases} (z+2)^2 = 4(x-3) & \ldots(3) \\ y = 1 & \ldots\ (4) \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Como generatriz tendremos la familia de elipses:

$$E:\begin{cases}\dfrac{(y-1)^2}{\alpha^2}+\dfrac{(z+2)^2}{\beta^2}=1 & \ldots(5)\\ x=\gamma & \ldots(6)\end{cases}$$

Aplicaremos el método de las generatrices.

(2) en (5):

$$\frac{(y-1)^2}{\alpha^2}=1, \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2=\alpha^2 \quad \ldots(7)$$

(6) y (7) en (1):

$$\alpha^2=9(\gamma-3) \quad \ldots EC_1$$

ahora (4) en (5):

$$\frac{(z+2)^2}{\beta^2}=1, \quad \Rightarrow \quad (z+2)^2=\beta^2 \quad \ldots(8)$$

(6) y (8) en (3):

$$\beta^2=4(\gamma-3) \qquad \ldots EC_2$$

Ahora con las ecuaciones de condición y la generatriz:

EC_1 y EC_2 en (5):

$$\frac{(y-1)^2}{9(\gamma-3)}+\frac{(z+2)^2}{4(\gamma-3)}=1$$

$$\frac{(y-1)^2}{9}+\frac{(z+2)^2}{4}=(\gamma-3)$$

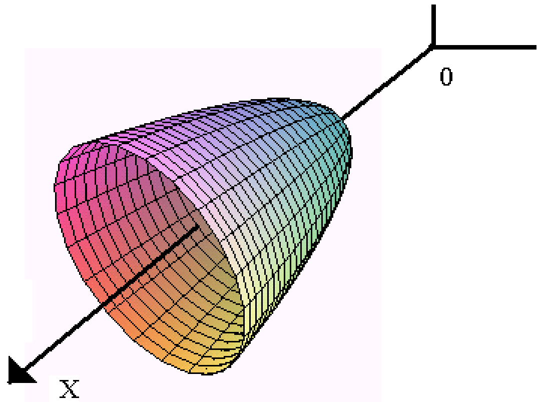
pero $\gamma=x$ por la ecuación (6), entonces:

$$\frac{(y-1)^2}{9}+\frac{(z+2)^2}{4}=(x-3)$$

que es la ecuación de la superficie y que puede escribirse:

$$4(y-1)^2+9(z+2)^2=36(x-3)$$

La superficie generada es un paraboloide elíptico.



NOTA.- El programa de la asignatura, vigente en la fecha de terminación de esta obra, no contiene el método de las generatrices; sin embargo, se incluye en la guía porque puede haber estudiantes que deban examinarse con un plan de estudios anterior o porque en cambios posteriores a los planes de estudio podría volver a incluirse.

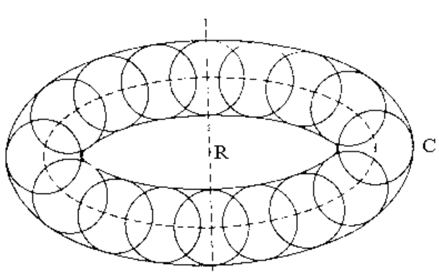
CONCEPTO PRINCIPAL: Método de las generatrices para obtener la ecuación cartesiana de una superficie.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Geometría analítica plana. La elipse. Álgebra. Ecuaciones simultáneas.

EJERCICIO VII.10. Determinar la ecuación cartesiana del toro (toroide) que se genera al hacer girar a la circunferencia de ecuaciones:

$$C:\begin{cases}(y-16)^2+(z-8)^2=1 & \dots \quad (1)\\ x=6 & \dots \quad (2)\end{cases}$$

alrededor de la recta de ecuaciones:

$$R:\begin{cases}x=6\\ y=12\end{cases}$$



SOLUCIÓN:

Cada punto de la circunferencia C, al girar alrededor de R forma una circunferencia con centro sobre la recta R y radio de longitud variable, de manera que puede usarse a C como directriz y como generatriz a la familia de circunferencias así descritas:

$$G:\begin{cases}(x-6)^2+(y-12)^2=\alpha^2 & \ldots \quad (3)\\ z=\beta & \ldots \quad (4)\end{cases}$$

Apliquemos el método de las generatrices:

Al sustituir (2) en (3):

$$(y-12)^2=\alpha^2$$
$$y-12=\pm\alpha$$
$$y=12\pm\alpha \quad \ldots \quad (5)$$

ahora ((5) y (4) en (1):

$$(12\pm\alpha-16)^2+(\beta-8)^2=1$$
$$(\pm\alpha-4)^2+(\beta-8)^2=1 \quad \ldots \quad (EC)$$

La siguiente etapa del método es trabajar con la ecuación de condición y la generatriz:

De (3):

$$\alpha=\pm\sqrt{(x-6)^2+(y-12)^2}$$

sustituyendo este valor en la ecuación de condición y tomando en cuenta (4):

$$\left(\pm\sqrt{(x-6)^2+(y-12)^2}-4\right)^2+(z-8)^2=1$$

que es la ecuación cartesiana de la superficie.

NOTA.- El programa de la asignatura, vigente en la fecha de terminación de esta obra, no contiene el método de las generatrices; sin embargo, se incluye en la guía porque puede haber estudiantes que deban examinarse con un plan de estudios anterior o porque en cambios posteriores a los planes de estudio podría volver a incluirse.

CONCEPTO PRINCIPAL: Método de las generatrices para obtener la ecuación cartesiana de una superficie.
CONCEPTOS SECUNDARIOS Y ANTECEDENTES: Geometría analítica plana. La circunferencia. Álgebra elemental. Ecuaciones simultáneas.